广义函数简史

李　斐　王　昌　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京·BEIJING

内 容 简 介

本书论述了广义函数理论创建的背景、过程、原因，以及这一理论对线性偏微分方程理论发展的影响。这不仅有助于人们理解泛函分析发展的历程，而且为数学家的科研工作提供了一种富有启发性的模板和案例，具有理论和现实意义。本书以“为什么数学”为切入点，从主、客观两个方面论述了施瓦兹能够成功创建广义函数理论、有幸成为广义函数理论奠基者的原因，以便使人们更全面地理解和看待数学理论的发展，更深入地理解这一理论。

本书可作为高等院校相关专业的高年级本科生和研究生的参考教材，也可供从事近现代数学史研究的工作者、广义函数和泛函分析的工作者以及教授广义函数和泛函分析课程的教师阅读参考。

图书在版编目（CIP）数据

广义函数简史 / 李斐，王昌编著. — 北京：电子工业出版社，2018.6

ISBN 978-7-121-34239-4

I. ①广… II. ①李… ②王… III. ①广义函数－研究 IV. ①O177.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2018）第 106126 号

策划编辑：冯小贝
责任编辑：冯小贝
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×980　1/16　印张：9.5　字数：155 千字
版　　次：2018 年 6 月第 1 版
印　　次：2018 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888，88258888。

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn。

本书咨询联系方式：fengxiaobei@phei.com.cn。

前　言

20 世纪 40 年代末，法国数学家施瓦兹在前人研究工作的基础上建立的广义函数理论(他称其为“分布理论”)是泛函分析的一个重要发展。这一理论因数学与物理学的发展需要而产生。这一理论的建立不仅丰富了泛函分析，而且促进了 20 世纪以及未来数学和物理学的发展，如加快了偏微分方程理论发展的步伐、奠定了量子力学研究的基础等。

广义函数概念的引入标志着函数概念进入了新的发展阶段，施瓦兹《分布理论》一书的出版，标志着广义函数理论作为新分析学分支的诞生。对广义函数理论创建的过程、原因、影响以及相关历史问题进行研究具有重要意义。首先，这一研究是泛函分析史的重要组成部分，有助于我们更全面地理解整个泛函分析的历史发展进程。其次，有助于我们理解施瓦兹的思想，进而为数学家的科研工作提供一种可借鉴的思路或方法，同时也为理解近现代数学思想的传承演变提供重要的参考资料。最后，历史是教学的指南，通过研究广义函数理论的历史，为泛函分析和广义函数理论的教学提供更全面的历史背景，有助于相关专业的学习者更加深刻地理解其思想脉络。

这本《广义函数简史》是在已有研究成果的基础上，通过研读海维赛德、狄拉克、索伯列夫、施瓦兹、马尔格朗日和赫尔曼德尔等物理学家、数学家的原始文献及其相关研究文献，从“是什么”“如何做”和“为什么”这三个逐渐递进的数学史研究角度，对广义函数建立的过程、形成的原因等问题进行详细论述而完成的。书后详细列出了相关参考文献，以便感兴趣的读者进行查阅，同时对文献作者表示诚挚的敬意和感谢。

本书力图全面、合理地描绘并呈现出广义函数理论建立的历史过程和原因。首先探究施瓦兹在什么问题的刺激下，以什么为灵感，如何引入分布概念的。接着对施瓦兹的相关原始文献进行剖析，探析蕴含在其工作之中的深刻思想和方法，展示他在这种思想和方法的指导下做出的具体工作。继而从数学背景、时代背景、数学传统以及科研目标等主、客观方面，探讨施瓦兹能够成功创建

分布理论的原因；分析了虽然索伯列夫先于施瓦兹近十年之久引入了广义函数的泛函定义、发展了相关运算，但是广义函数理论的奠基者却是施瓦兹而不是索伯列夫的历史必然性。最后简要论述了广义函数理论产生的影响及其进一步发展，着重论述这一理论对线性偏微分方程理论的影响。

本书对广义函数的发展历程及施瓦兹等人为此做出的贡献和产生的重大意义给予了详细阐述，对学习泛函分析、研究泛函分析史有很大帮助，值得相关专业的高年级本科生、研究生以及数学史工作者和爱好者阅读。

感谢家人的支持，让我安心完成书稿；感谢恩师曲安京教授的指导和帮助；感谢电子工业出版社谭海平先生和冯小贝编辑的帮助以及珍贵意见；感谢国家自然科学基金（11726019）以及西北大学科学史学科建设经费的资助。基于作者水平有限，书中难免有不足之处，感谢读者给予批评指正（E-mail：nancong1987@163.com）。

李斐　王昌

2018 年 1 月于西安

目　　录

第 1 章　狄拉克与 δ 函数

数学与物理学之间是相互促进、相互发展的。自牛顿（I. Newton，1643—1727）时代起，物理学家就借助广泛的数学工具来研究物理现象的数学模型——数学物理问题。反过来，数学物理的研究亦刺激了数学的发展，尤其是理论物理学的不断发展要求“更高的数学”作为其理论基础，这就为数学科学提供了强大的发展动力。

17 世纪，英国数学家、物理学家牛顿和莱布尼茨（G. W. Leibniz，1646—1716）在前人数学思想的积累与指导下创立了微积分。这一数学分支的建立是科学技术发展史上的大事件，被誉为人类文明史上的划时代事件。人们利用这一卓有成效的数学工具描述了许多新的自然现象，取得了前所未有的成就。那时，人们普遍认为描述自然现象的函数总是足够光滑的，函数的光滑性似乎是大自然的和谐反映。

然而，随着数学的进一步发展，人们逐渐意识到不光滑函数的存在。1861 年，德国数学家魏尔斯特拉斯（K. T. W. Weierstrass，1815—1897）给出了一个处处连续、处处不可微的函数 $f(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}b^n\cos(a^n x\pi)$。19 世纪中期，人们已经知道并不是任意一个函数都能进行微分、积分运算，许多运算只能在特定的条件下进行。

诚然，随着古典分析学的不断发展，我们不得不承认其直观性减弱了，作为描述自然现象的工具其灵活性也降低了，这便迫使数学家不得不考虑推广已有函数概念的范围。也就是说，已有函数概念已经无法适应数学科学自身的发展，数学家需要思考如何对其进行推广，甚或是引入新的数学对象。另一方面，经典函数概念已经无法满足物理学的发展，尤其是量子场理论，这便使物理学家开始寻求新的数学对象来开展学术研究。

19 世纪末，英国电子工程师海维赛德（O. Heaviside，1850—1925）在“数学物理中的算子”一文中大胆引进并使用了没有得到数学证实的算子演算法则，其中要求对在原点处不连续的海维赛德函数进行求导，该函数的导数即为狄拉

克函数$\delta(x)$。20 多年之后，英国物理学家狄拉克(P. A. M. Dirac，1902—1984)在量子力学研究过程中直接引入了δ函数。很快，数学家便从纯粹的数学角度指出狄拉克函数是毫无意义的。事实上，狄拉克自己也很清楚δ函数在经典函数定义下并不是一个函数，但是用它的确能够有效地处理物理学问题——这暴露出了经典函数概念的局限性。

1.1 海维赛德的算子演算

海维赛德(见图 1.1)是自学成才的英国电气工程师、物理学家和数学家。他的兴趣广泛，极度地享受阅读并对学术研究饱含着争辩和任性的风格。他是哥廷根大学的荣誉博士，是第一位获得法拉第奖的物理学家，并且是英国皇家学会的会员。

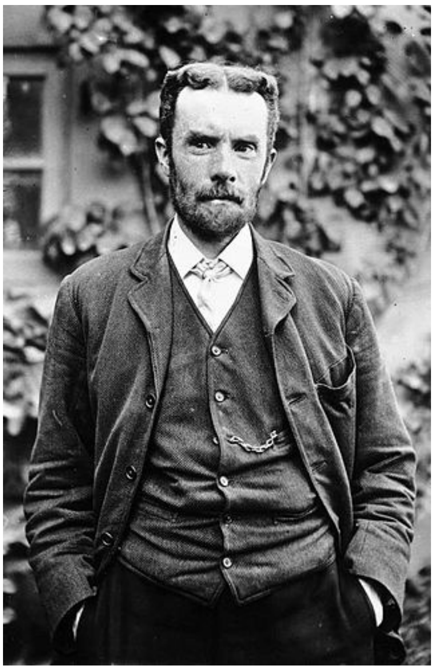


图 1.1 海维赛德(O. Heaviside，1850—1925)

海维赛德的主要科学贡献在于发展并重新形成了英国物理学家麦克斯韦(J. C. Maxwell，1831—1879)的电动力学，他的数学思想正是在这一物理研究活

动的背景下产生的。他引入了求解微分方程的数学方法(等价于拉普拉斯变换)，根据电磁力和能量流重述了麦克斯韦场方程，发表了很多电磁学文章[①]。

微分算子满足结合律和分配律，故莱布尼茨的微分记号使数学家可以把微分算子看作不依赖所作用的函数的代数量，这一思想为海维赛德发展其符号运算法则提供了基本保障。另外，海维赛德在发展他的算子演算之前，已经从英国数学家布尔(G. Boole，1815—1864)的著作《微分方程讲义》中获得了用抽象代数方法处理运算微积分的知识。正是在这些思想的基础上，海维赛德于 19 世纪末提出了他的符号运算法则，引进了海维赛德函数和单位阶跃函数。

1.1.1　电磁学的贡献，算子演算的源泉

海维赛德出生于英国伦敦卡姆登镇普伦德街。孩提时患过猩红热，损伤了听力，这导致他与同学的关系不够融洽，童年并不快乐。然而，他的学习成绩却相当不错，1865 年时位于学校 500 名学生中的第 5 名。遗憾的是，出于家庭的原因，16 岁之后他就再也没有接受过正规的学校教育。即便如此，基于对知识的渴望，他自学了莫尔斯电报密码学、电学，以及丹麦语和德语。

青年时，海维赛德想成为一名电报员，并幸运地得到了叔叔惠斯通(C. Wheatstone，1802—1875)的帮助。惠斯通是位英国物理学家，是电报和电磁学领域的知名专家，是 19 世纪 30 年代中期第一台商业电报机的发明者之一。1867 年，惠斯通介绍海维赛德与他的哥哥亚瑟(Arthur)一起工作，亚瑟那时正在经营惠斯通位于英格兰纽卡斯尔的一家电报公司。第二年，海维赛德便到丹麦从事电报员工作，因在工作中的飞速进步而于 1871 年来到英格兰纽卡斯尔大北电报公司工作，当时该公司正在通过英国承包商铺设从纽卡斯尔到丹麦的电缆。

尽管海维赛德的听力越来越糟糕并且依旧坚守在电报员的岗位上，但是他却在工作之余进行电学研究，同时发表电学文章。22 岁那年，他在知名杂志上发表了一篇学术论文，文中提出了使用电流计和电池测量电阻的最佳惠斯通电桥方法，这一方法赢得了包括汤姆森(W. Thomson，1824—1907)在内的许多物理学家的肯定，尤其是没有成功解决该代数问题的物理学家。

① 这些文章后来基本都收录在《电学文章》和《电磁学理论》(共三卷)这两部著作之中，其中《电学文章》主要包含了 1873—1891 年的文章，《电磁学理论》则收录了 1891—1912 年的文章。

麦克斯韦(见图 1.2)的经典之作——《电磁学专著》，对海维赛德产生了深远影响。海维赛德有幸在 1873 年看到这一巨著时，便对它产生了浓厚兴趣，并因此放弃了电报员的工作，潜心致力于该理论的研究。对此，他在年迈时有这样的回忆：

“记得我第一次看到这部伟大专著时，我还是一个年轻人……我认为这是一部卓越的、非常卓越的、最卓越的著作，其中蕴含着巨大的潜能……我下决心一定要吃透这部著作，并为之付出了实际行动。那时我的知识极其贫瘠，没有数学分析的知识，仅在学校学过代数和三角学，且绝大部分已经遗忘了。因此，我花费了好几年时间，才能尽自己最大的可能理解这部著作。随后，我便把麦克斯韦理论放到一边，跟着自己的节奏走，取得了更快的进步……可以这样讲，我按照自己对麦克斯韦理论的理解，传扬着这部著作的真谛。”

图 1.2　麦克斯韦(J. C. Maxwell，1831—1879)

海维赛德还促进了传输线理论——我们现在熟知的“电报方程”——的发展，从而加快了电报机实现的速度。他从数学上指出，电报线上均匀分布的电感将有助于减小信号的衰减和扰动，同时在电感系数足够大而阻抗不是很高的情况下，电报线上传输的各个频率的电流信号具有相同的速度，此时的电报线路是无扰的。

19 世纪 80 年代后期到 90 年代前期，海维赛德对物理学的贡献主要集中于以下两个方面。一方面，他致力于电磁质量的研究，于 1889 年首次提出了作用

于运动带电粒子的磁力的正确术语，即我们现在所称的洛伦兹力。另一方面，他在 1902 年预言大气层中存在着一个导电层，它使无线电信号沿着地球曲率传播，这即为后来被命名的“海维赛德层”。当无线电脉冲垂直向上传输，接收到反射层返回的脉冲时，这个预言便被证实了。英国物理学家阿普尔顿(E. V. Appleton，1892—1965)正是因为证实了该电离层的存在，于 1947 年荣获诺贝尔物理学奖。

海维赛德把数学看作与物理科学一样的实验科学，物理直觉常常指引着他的数学推理。正如他所言：

“在研究的一开始，我们必定是通过直觉而不是严格的规则来进行研究的。如同在物理学中一样，在数学中我们首先必须知道事情是如何进行的。当我们明白了事情是如何进行的之后，我们或许能够理解事情发展过程的含义。”

基于电磁学问题的研究，海维赛德发展了向量方法和向量微积分，鼓励该方法的运用。出于对海维赛德在电磁现象数学描述方面取得的成就表示认可，英国皇家学会在 1891 年选举他为会员，这可能是他获得的最大荣誉。第二年，英国皇家学会还在其相关的哲学杂志上为海维赛德向量方法和电磁理论留出了五十多页的版面。

1884 年，海维赛德把麦克斯韦电磁学公式从原来烦琐的形式简述成现代的向量术语，运用向量微积分中的旋度和散度算子，把原来含有 20 个未知数的 20 个方程中的 12 个减少到含有两个未知数的 4 个微分方程。这就是我们现在熟知的麦克斯韦方程组，它描述了电荷和磁场的性质，以及它们之间的关系——电磁场。诚然，我们现在所称的麦克斯韦方程组实际上是海维赛德方程组。

继而，他通过引入海维赛德阶梯函数，模拟了电路中的电流，成为第一位引入单位脉冲函数的科学家；发明了解线性微分方程的算子演算方法，提出了一个求解微分方程的方法，运用该方法成功求解了常系数常微分方程及一些偏微分方程。海维赛德算子演算方法的基本思想是：用变量 p 替换微分算子 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$，把微分方程转化成代数方程并求解，再通过换算表转换代数方程的解，得到原微分方程的解，从而求解从电路理论中得到的微分方程。英国数学家惠特克(E. T. Whittaker，1873—1956)对海维赛德在算子演算方面的贡献有这样的评价：

“海维赛德的算子演算、庞加莱(J. H. Poincaré，1854—1912)的自守函数和里奇(Ricci)的张量计算，堪称是19世纪最后25年里最重要的数学进展。它们的应用、推广及论证是当今数学活动的重要组成部分。”

虽然海维赛德的算子演算方法在求解微分方程上取得了很大成功，但是该方法缺乏严谨性，这一点与19世纪末追求严格化的数学家的观点格格不入。许多科学家都曾质疑、反对海维赛德的这一做法，剑桥大学的数学家就对他不严格地使用发散级数的做法感到非常愤怒，并因此拒绝发表他的一系列文章。譬如，伯恩赛德(W. Burnside，1852—1927)拒绝接受海维赛德提交给《英国皇家学会学报》的一篇关于算子演算的论文，拒绝的理由是文章含有错误的内容、证明具有不可挽救的错误。再如，泰特(P. G. Tait，1831—1901)支持四元法，反对海维赛德的向量法，常常给《自然》杂志写信反对海维赛德的方法。然而，对于这些异议，海维赛德有这样经典的回应：

“数学是一门实验科学，定义不是首先出现的，而是后来引入的……我不会因为不懂消化过程就拒绝我的晚餐。”

所幸的是，并非所有科学家都只关注海维赛德算子演算的不严密性，也有一些科学家注意到他研究工作中值得认可和称赞的地方。比如，作为电气工程师协会的主席，汤姆森在1889年发表就职演讲时就把海维赛德的工作称为权威；洛奇(Lodge)向《自然》杂志写信，这样赞许海维赛德：

“……海维赛德对电磁波的理解、研究的深入程度迄今无人可及。”

1.1.2 符号运算法则与 δ 函数

海维赛德在研究电磁学问题时提出了符号运算法则，引进了海维赛德函数及其导数，运用这一运算法则成功地求解了一些微分方程，尤其是常系数微分方程。现在，我们通过《电磁学理论》第二卷中的两个实例来考察他的算子演算。

在研究电路问题时，海维赛德把电路系统中的电阻算子定义为：把电流 C 转换成电压 e 的算子 Z，即 $e=ZC$ 或 $C=\frac{1}{Z}e$。纯电阻 R（电导 $\frac{1}{K}$）的电阻算子是

$R\left(\frac{1}{K}\right)$，自感线圈 L 的电阻算子是 $Z=L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，电容为 S 的电容器的电阻算子是 $Z=\frac{1}{S}\int_0^t\cdot\mathrm{d}t$。然后，他记 $p=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，$p^{-1}=\int_0^t\cdot\mathrm{d}t$，则自感线圈和电容器的电阻算子可分别记为 Lp 和 $\frac{1}{S}p^{-1}$。

例 1　海维赛德考察被电动势 e 所作用的内阻为 R 的线圈 L 和一个漏电的电容器。他想通过 e 来确定 C。通过一般准则，他将电阻与电阻算子联系起来，得到图 1.3 所示的连接系统的电阻算子。

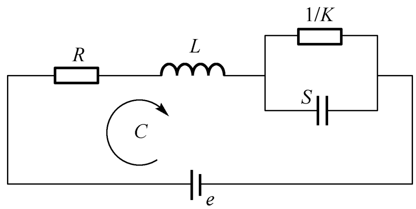


图 1.3　例 1 的电路图

首先，他发现漏电电容器的电阻算子 Z' 可由电容器 $\frac{1}{Sp}$ 和与其并联的电阻 $\frac{1}{K}$ 来确定，即由 $\frac{1}{Z'}=K+Sp$ 可得 $Z'=\frac{1}{K+Sp}$，故总电阻算子 $Z=R+Lp+(K+Sp)^{-1}$。因此，$C=\frac{e}{Z}=\frac{e}{R+Lp+(K+Sp)^{-1}}$，称为所求问题的演算解。

然后，海维赛德的目标是把这个演算解转化成关于 t 的函数(真解)。也就是说，消去演算解中的 p 和 p^{-1}。当 e 是简谐振动($e=\sin nt$)时，在 $K=S=0$ 的情况下，海维赛德这样来消去演算解中的 p 和 p^{-1}，如他所述：

“在这种情况下，对于周期解，事情很简单。借助性质 $p^2=-n^2$ 和 $p=ni$，当 e 已知时便可把电阻算子简化成标准形式 $a+bp\cdots\cdots$”

因为 $C=\frac{e}{R+Lp}=\frac{(R-Lp)e}{R^2+L^2n^2}$，所以若 $e=\sin nt$，则 $C=\frac{R\sin nt-Ln\cos nt}{R^2+L^2n^2}$。

如果在 $t=0$ 时 e 是一个不断的外力，那么海维赛德用这样的技巧来处理演算解(再次令 $K=S=0$)：按照 p 的降幂或升幂展开演算解。因为

$$C=\frac{e}{R+Lp}=\frac{e}{Lp\left(1+\frac{R}{Lp}\right)}=\frac{1}{R}\left\{\frac{R}{Lp}-\left(\frac{R}{Lp}\right)^2+\left(\frac{R}{Lp}\right)^3-\cdots\right\}e \text{①} \tag{1.1}$$

借助 $p^{-n}1=\frac{t^n}{n!}$ ②，则式(1.1)可以转化为 $C=\frac{e}{R}\left\{\frac{Rt}{L}-\frac{1}{2!}\left(\frac{Rt}{L}\right)^2+\frac{1}{3!}\left(\frac{Rt}{L}\right)^3-\cdots\right\}$，所以可得 $C=\frac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$。他还按照 p 的升幂来展开演算解，即 $C=\frac{e}{R+Lp}=\frac{1}{R}\left(1-\frac{Lp}{R}+\left(\frac{Lp}{R}\right)^2-\cdots\right)e$。若 $t>0$ 时 e 是常数，则海维赛德假设 $p^n e$ 为零，从而有 $C=\frac{e}{R}$。另外，海维赛德注意到当 $t\to\infty$ 时，$C=\frac{e}{R}$ 是 $C=\frac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\frac{Rt}{L}\right)\right)$ 的渐近展开。

例 2 海维赛德考察被电动势 $e=H(t)$ 作用的半无限电缆和具有电阻算子 Z 的连接系统，如图 1.4 所示。

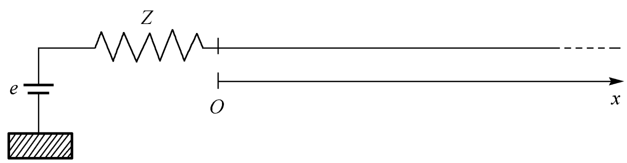


图 1.4 例 2 的电路图

首先，海维赛德发现电势 $V(x,t)$ 和电流 $C(x,t)$ 之间存在这样的关系③：

$$-\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}x}=SpV\,,\quad -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x}=RC \tag{1.2}$$

其中，S 是静电电容，R 是单位长度的电阻。消去 C，得到

$$\frac{\mathrm{d}^2V}{\mathrm{d}x^2}=RSpV=q^2V \tag{1.3}$$

其中定义 $q^2=RSp$。把 p 看成常数，他得到式(1.3)的演算解 $V(x,t)=A\mathrm{e}^{qx}+B\mathrm{e}^{-qx}$，

① 按照 p 的降幂展开。

② 海维赛德在这里使用的记号 1 即为海维赛德函数 $H(t)$。

③ 海维赛德在这里忽略了电缆中的自感。

其中 A 和 B 是关于 t 的任意函数。再通过边界条件 $x=0$ 和 $x=\infty$，则有 $V(x,t)=V_0\mathrm{e}^{-qx}$，其中 V_0 是在 $x=0$ 处的外加电动势。

通过式(1.2)和 $V(x,t)=V_0\mathrm{e}^{-qx}$，他得到 $C=\dfrac{q}{R}\mathrm{e}^{-qx}V_0=C_0\mathrm{e}^{-qx}$，其中 C_0 表示电缆末端的电流。再对 $V_0=\dfrac{R}{q}C_0$ 应用 $q^2=RSp$，得 $V_0=\dfrac{R}{(RSp)^{\frac{1}{2}}}C_0=\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}C_0$，因而电缆的电阻算子是 $\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}$。

因此，若在外部电压的作用下，把 Z 放于电缆和地面之间，则可用 $C_0=\dfrac{e}{Z+\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}}$ 来表示通过 Z 并进入电缆的电流。之所以可以这么做，是因为算子可以像电阻那样是可加的。

另一方面，借助前面的结果 $V_0=\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}C_0$，可由 $C_0=\dfrac{e}{Z+\left(\dfrac{R}{Sp}\right)^{\frac{1}{2}}}$ 得 $V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$，即得到了关于 e 的 V_0（电缆始端的势）。

接着，海维赛德假设 Z 是纯电阻 r，e 在 $t=0$ 处是恒定外力，即 $e=eH(t)$。然后，他按 p 的升幂展开得到 $V_0=\left\{1-r\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}+r^2\dfrac{Sp}{R}-r^3\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{3}{2}}+\cdots\right\}e$。当 n 是自然数时，他证明 $p^n e=0$，从而得到

$$V_0=\left(1-r\left(1+\frac{r^2Sp}{R}+\frac{r^4S^2p^2}{R^2}+\cdots\right)\left(\frac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}\right)e \tag{1.4}$$

显然，海维赛德在这里遇到了分数阶微分问题。对于这个问题，他凭借经验进行处理，证明 $p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$。借助 $p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$，则可由式(1.4)得

$$V_0=e-er\left(\frac{S}{R\pi t}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1-\frac{r^2S}{2Rt}+1\cdot 3\left(\frac{r^2S}{2Rt}\right)^2-\cdots\right\} \tag{1.5}$$

事实上，在没有使用“逐渐级数”这个术语的情况下，当 $t\to\infty$ 时，海维赛德按照他的方式由式(1.5)得到了关于 $V(t)$ 的渐近级数。对于式(1.5)，他有这样的论述：

“当 t 足够小而使原来级数不收敛时，式(1.5)是不适宜的。据说每种毒药都有解药，并且一些业余植物学家声称可以在毒药附近找到解药。对此，我们在这里给出一个例证：式(1.5)的解药是以另外一种方式处理 $V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$。”

随后，海维赛德按 p 的降幂展开 $V_0=\dfrac{e}{1+Z\left(\dfrac{Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}}$，得到

$$V_0=\left(\frac{R}{r^2Sp}+\left(\frac{R}{r^2Sp}\right)^2+\cdots\right)\left(\frac{r^2Sp}{R}\right)^{\frac{1}{2}}e-\left(\frac{R}{r^2Sp}+\left(\frac{R}{r^2Sp}\right)^2+\cdots\right)e$$

同理，运用 $p^{\frac{1}{2}}H(t)=(\pi t)^{-\frac{1}{2}}$ 可得

$$V_0=2e\left(\frac{Rt}{r^2S\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{2Rt}{3r^2S}+\frac{1}{3\cdot 5}\left(\frac{2Rt}{r^2S}\right)^2+\cdots\right\}-e\left(\exp\frac{Rt}{r^2S}-1\right) \tag{1.6}$$

海维赛德对此解说道：

“现在不难看出，当 t 的值较小时我们便可容易地计算 V_0。但是当 t 的值较大时，式(1.6)是不适用的。因此，我们可以把式(1.5)看成毒药，将式(1.6)看成解药。它们是相互补充的，而不是相互矛盾的。”

现在回过头来看例 1，易知当 $t\to\infty$ 时，$C=\dfrac{e}{R}$ 是 $C=\dfrac{e}{R}\left(1-\exp\left(-\dfrac{Rt}{L}\right)\right)$ 的

渐近展开，它们之间的关系亦如海维赛德所言的“毒药”与“解药”之间的关系。

通过上面两个实例，我们不难把海维赛德处理问题的思路归结为以下三个步骤：首先，建立微分方程。其次，求出演算解。然后，消去演算解中的 p 和 p^{-1}。在步骤二中，他用 p 代替 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，把常微分方程转换成代数方程，再把 p 看作代数量来求解这些方程，得到符号解(亦称演算解)[①]。在第三步中，他运用了按 p 的降幂和升幂展开的技巧。这一程序是海维赛德处理问题的典型思路，是他算子演算工作中最基本的内容。

诚然，由上述两个例子可知，正是在符号运算法则中海维赛德引入了“单位阶跃函数” $H(t)$。这就是我们现在所知的海维赛德函数 Y，它是一个实变量函数：$Y(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ +1, & t\geqslant 0\end{cases}$。虽然这个函数在点 $t=0$ 处不可导，但是海维赛德却称其导数是“单位冲激函数”：$Y'(t)=\begin{cases}0, & t\neq 0\\ +\infty, & t=0\end{cases}$，且其积分等于 1，即对所有 $\varepsilon>0$ 有 $\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon}Y'(t)\mathrm{d}t=Y(\varepsilon)-Y(-\varepsilon)=+1$ 和 $\int_{-\infty}^{+\infty}Y'(t)\mathrm{d}t=+1$。虽然狄拉克在量子物理学的研究过程中于 1926 年首次明确地引入了函数 $Y'(t)$——我们现在所称的狄拉克函数 $\delta(x)$，但是海维赛德显然要比狄拉克更早地引入了这一函数。

除了在符号运算法则中引进阶跃函数及其导数，海维赛德还引入了卷积的符号运算法则：$(f*g)(t)=F(p)G(p)$，其中 $F(p)$ 表示函数 $f(t)$ 的符号。也就是说，他通过引入函数的符号把卷积运算表示成乘法运算。

应用卷积公式及 δ 函数在原点之外取值为零的性质，可知狄拉克函数的符号是 1。这是因为 $(\delta*f)(x)=\int_{-\varepsilon}^{t}\delta(x)f(t-x)\mathrm{d}x=\int_{-\varepsilon}^{t}\delta(x)f(t)\mathrm{d}x=f(t)\int_{-\varepsilon}^{t}\delta(x)\mathrm{d}x=f(t)$，即 $\delta*f=f$，因而 δ 函数是卷积代数的单位元。也就是说，由于 δ 函数的符号是 1，从而在卷积的符号运算法则中记 $\delta*f=f$ 为 $1F=F$。

1.2　狄拉克函数的引进

狄拉克(见图 1.5)是量子力学的奠基者之一，是一位伟大的英国理论物理学

① 虽然海维赛德指出并非所有微分、积分算子满足交换律，但是他并没有尝试去探究满足交换律的微分、积分算子应该具备的条件。

家。他在非常严格的家庭环境中长大，父亲对他的要求极其严格，以至于父子关系略显生疏。小学时，他的数学才华就被老师发现。当他进入中学学习阶段时，第一次世界大战爆发了，但这对狄拉克来说是件好事。这是因为高年级的学生要离开学校去服兵役，所以低年级学生便有机会接近科学实验室以及其他设备。这一经历为狄拉克日后的科研工作做了很好的铺垫，如他所言：

“我中学时所在的学校在科学和现代语言的培养方面做得相当不错，这里没有拉丁语和希腊语。我对这里的一些事情感到很高兴，这是因为我不用去鉴别古文化的价值。能在这所学校学习，我感到非常幸运……我很快完成了低年级的课程，随后便开始学习高年级的数学、物理和化学课程。对于数学科学，我正在学习的课本领先于其他年级的教材。这种快速进步对我日后的学术生涯具有很大的帮助。”

图 1.5　狄拉克（P. A. M. Dirac，1902—1984）

1918 年，狄拉克从中学毕业之后便顺利到布里斯托尔大学学习电子工程学。尽管他非常喜欢数学，但最终还是选择了工程学。这是因为他考虑到自己日后的职业规划，他认为学校教学是数学家唯一可能的职业，而他一点都不喜欢这个职业。

1921 年获得工程学学士学位之后，狄拉克并没有找到一个与其专业对口的永久性工作，恰在此时他对数学充满了真正的热情，因而他打算到剑桥大学继

续学习。遗憾的是，他的这一愿望并没有顺利实现。1921 年，他参加剑桥大学奖学金考试，获得了到剑桥圣约翰学院研究数学的奖学金，但这笔钱并不足以支付他所有的费用。为此，他向当地教育部门寻求资助，然而当地教育部门却以他的父亲还不是英国居民而拒绝了他的申请。当此之时，他获得了一个在布里斯托尔大学免费进行数学研究的机会，并于 1923 年因在这里的卓越工作而被授予一等荣誉。随后他便获得了到剑桥大学做研究的经费。

在剑桥大学，狄拉克原本希望跟随坎宁安(E. Cunningham，1881—1977)做研究。令人遗憾的是，当时坎宁安已经招满学生，因而由福勒(R. Fowler)来指导狄拉克。福勒精通原子理论，其绝大部分科研是关于统计力学的。在福勒的影响下，狄拉克开始研究统计力学问题，半年时间就写出了两篇学术论文。

1924 年 5 月，狄拉克完成了第一篇关于量子问题的文章，之后又在 1925 年完成了 4 篇相关学术论文。1926 年，他以“量子力学”这一优秀毕业论文获得了博士学位，随后便到哥本哈根与博尔(N. H. D. Bohr，1885—1962)一起做研究。值得注意的是，他在提交博士论文之前已经发表了 11 篇相关文章。1927 年他来到哥廷根，在这里结识了美国物理学家奥本海默(R. Oppenheimer，1904—1967)和量子力学奠基者之一的德国犹太裔理论物理学家博恩(M. Born，1882—1970)。

1928 年，狄拉克发现了相对论与量子力学之间的联系，即著名的自旋 $-\frac{1}{2}$ 狄拉克方程。两年之后，他出版了经典著作《量子力学原理》(见图 1.6)，该著作很好地体现出他抽象但简单的思维模式，现已成为极具影响力的经典之作。1933 年，狄拉克正是因为这一著作而荣获物理学界最高奖——诺贝尔奖(见图 1.7)。除此荣誉之外，他还在 1930 年当选为英国皇家学会会员，1939 年荣获英国皇家学会皇家奖章，1952 年因在量子力学中质点相对论动力学方面的卓越贡献被英国皇家学会授予科普利奖章。

毋庸置疑，狄拉克对物理科学做出了巨大贡献，然而他的物理研究常常受到数学之美所激励。他不但统一了量子力学理论和相对论，而且在磁单极子、基本长度、反物质和 δ 函数等方面做出了出色成果。

为了指出离散变量与连续变量之间的相似之处，狄拉克不得不引入奇异的 δ 函数：$\delta(x)=\begin{cases}0, & x\neq 0\\ +\infty, & x=0\end{cases}$ 且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\,\mathrm{d}x=+1$，这一成果发表在他 1927 年的

文章“量子动力学的物理解释”中。这不仅使狄拉克获得了矩阵力学与波动力学的统一理论，而且在许多物理学问题及某些数学问题的研究中扮演着重要角色，如在电子工程学和量子力学中。为此，人们称δ函数为狄拉克函数，以此纪念他的这一伟大成就。

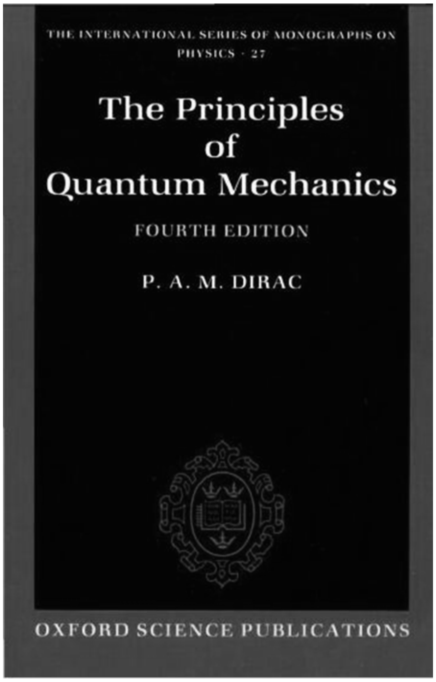


图 1.6 《量子力学原理》一书

图 1.7 诺贝尔奖的正面(第 4 版)

狄拉克用向量$\boldsymbol{\psi}$表示一个力学系统的状态，用线性算子α表示可观测量。在向量空间中，如果存在一组有限基或无限可数基$\boldsymbol{\psi}_p$，那么向量$\boldsymbol{\psi}$就可以用关于基$\boldsymbol{\psi}_p$的坐标a_p来表示，算子α则能够用有限或无限矩阵$\boldsymbol{\alpha}_{pq}$来表示。另外，狄拉克假设在向量空间中存在基$\boldsymbol{\psi}_p$。据此，他发现

$$\boldsymbol{\psi}=\sum_p a_p\boldsymbol{\psi}_p \tag{1.7}$$

$$\alpha\boldsymbol{\psi}_p=\sum_p \boldsymbol{\psi}_p\boldsymbol{\alpha}_{pq} \tag{1.8}$$

在这种表示中，由于物理中的大部分重要算子具有连续谱，因而上述可数性常常不被满足，这激发了狄拉克用积分表示替代和式(1.7)，即

$$\boldsymbol{\psi} = \int a_p \boldsymbol{\psi}_p \mathrm{d}p \tag{1.9}$$

此时产生这样一个问题：当限制系数 a_p 为有限集时，并不是任意一个向量 $\boldsymbol{\psi}$ 都能表示成式(1.9)的形式，例如 $\boldsymbol{\psi}_q$ 和 $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}_q}{\partial q}$ 就不能用式(1.9)来表示。正是为了解决这一问题，狄拉克引入了著名的病态函数——$\delta(x)$（见图 1.8）。借助 $\delta(x)$，他用坐标 $a_p = \delta(p-q)$ 表示向量 $\boldsymbol{\psi}_q$，并且微分 $\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}_q}{\partial q}$ 可表示成 $-\dfrac{\partial \boldsymbol{\psi}_q}{\partial q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{\psi}_p \delta'(p-q) \mathrm{d}p$。

> One cannot go far in the development of the theory of matrices with continuous ranges of rows and columns without needing a notation for that function of a c-number x that is equal to zero except when x is very small, and whose integral through a range that contains the point $x = 0$ is equal to unity. We shall use the symbol $\delta(x)$ to denote this function, *i.e.*, $\delta(x)$ is defined by
>
> $$\delta(x) = 0 \quad \text{when} \quad x \neq 0,$$
>
> and
>
> $$\int_{-\infty}^{\infty} x\, \delta(x) = 1.$$
>
> Strictly, of course, $\delta(x)$ is not a proper function of x, but can be regarded only as a limit of a certain sequence of functions. All the same one can use $\delta(x)$ as though it were a proper function for practically all the purposes of quantum mechanics without getting incorrect results. One can also use the differential coefficients of $\delta(x)$, namely $\delta'(x)$, $\delta''(x)$ …, which are even more discontinuous and less " proper " than $\delta(x)$ itself.

图 1.8　狄拉克在 1927 年的文章中引入的 δ 函数

在连续情况下，算子 α 的表示同样需要 δ 函数的帮助。首先，狄拉克用积分 $\alpha \boldsymbol{\psi}_q = \int \boldsymbol{\psi}_p \boldsymbol{\alpha}_{pq} \mathrm{d}p$ 替代式(1.8)。显然，此时便可用核 $\boldsymbol{\alpha}_{pq} = c\delta(p-q)$ 来表示该算子，其中 c 是常数。这一表示蕴含着所有算子都可以用核来表示的数学思想，而这就是我们现在所知的核定理的不精准表述。

狄拉克是一位熟练应用 $\delta(x)$ 的科学工作者。在引入 δ 函数之后，他还发展了它的一些性质，例如 $\delta(-x) = \delta(x)$、$x\delta(x) = 0$ 等。另外，$\delta(x)$ 的导数比它本身还奇异，狄拉克发现 $\delta'(-x) = -\delta'(x)$、$-x\delta'(x) = \delta(x)$ 等公式。再者，我们在狄拉克的经典著作《量子力学原理》中还可以看到下列公式：$\delta(ax) = a^{-1}\delta(x)$，

$\delta(x^2-a^2)=\frac{1}{2}a^{-1}\{\delta(x-a)+\delta(x+a)\}$（$a>0$），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\log x=\frac{1}{x}-\mathrm{i}\pi\delta(x)$。对于除法规律，若 $A=B$，则 $\frac{A}{x}=\frac{B}{x}+c\delta(x)$。

诚然，海维赛德的算子演算和狄拉克引入的 δ 函数确实能够有效地处理物理学和数学中的一些问题，但是它们的确缺乏严格的数学基础。首先，海维赛德函数在原点处不连续，因而它在这一点根本就没有经典微分学意义下的导数。其次，狄拉克函数在原点处取值为无穷也违背了经典函数概念的定义。再者，既然狄拉克函数几乎处处为零，那么它在实数轴上的积分值应该是零而不是 1。

也就是说，从古典分析学角度来看，海维赛德函数的导数或狄拉克引入的 $\delta(x)$ 是没有意义的。然而，狄拉克函数的确在物理学中有直观意义，并对研究物理问题有很大帮助，这就反映出经典函数概念的局限性。因此，更新已有数学概念，甚或是理论的重要性和紧迫性就不言而喻。

第 2 章　傅里叶变换和微分方程解的推广

除了物理学的发展需要之外，数学自身的发展也显示出已有理论的局限性。偏微分方程理论的发展和广义傅里叶变换问题均要求数学家对古典函数概念进行推广，迫使数学家引进相应的概念和方法，以便适应数学及其服务学科的发展。

2.1　傅里叶变换的推广

傅里叶变换的推广是广义函数理论的重要数学来源之一。19 世纪初，傅里叶（J. B. J. Fourier，1768—1830）在研究热传导问题时创建了傅里叶级数和傅里叶积分理论，这是 19 世纪卓越的数学成果，它深刻影响着 19 世纪及其之后物理学和数学各领域的发展。

2.1.1　傅里叶与热理论

傅里叶（见图 2.1）是法国伟大的数学家、物理学家。他在数学方面的研究成果被公认为“极优美的数学之作”，被称颂为“一首数学的诗”。除此成就之外，他还在 1808 年被拿破仑授予男爵称号，在 1827 年当选为法兰西学院院士，被英国皇家学会选为外籍会员。

1768 年，傅里叶出生于法国奥赛尔，母亲在他 9 岁之时便离开了人世，一年之后父亲也与世长辞。虽然他没有享受到多少来自父母的关爱，但是他却具有超群的天赋。小学阶段显现出语言天赋，他学习了拉丁文、法文；后来在奥赛尔皇家军事学院学习时又展示出文学天赋。然而不久之后，也就是在他 13 岁的时候，数学便成为他真正的兴趣所在。

在巴黎高等师范学校成立之初，傅里叶成为该校首批优秀学员。那时，大数学家拉格朗日（J. L. Lagrange，1736—1813）、拉普拉斯（P. S. M. de Laplace，1749—1827）和蒙日（G. Monge，1746—1818）都在巴黎高等师范学校执教，傅里

叶有幸受到这些著名数学家的教导，在此进行学习和研究。然而，三四年之后他便不能专注于学习和科研，这是因为他在 1798 年被蒙日选派，跟随拿破仑远征埃及。虽然他在 1801 年返回法国并开始在巴黎工科学校任教，但是拿破仑却想让傅里叶继续为他效劳。正如拿破仑所言：

“……伊泽尔的长官去世了，我想通过任命傅里叶来担任这一职务而表示对他的信任。”

图 2.1　傅里叶（J. B. J. Fourier，1768—1830）

傅里叶并不愿意离开巴黎、离开学术界，但他又不能拒绝拿破仑，因而作为一名长官来到格勒诺布尔开始繁杂的工作。即便如此，在格勒诺布尔这段时间，傅里叶仍然坚持学术研究，他在热传导理论方面的重要数学工作就是在这一时期完成的。

1804 年，他开始关注热传导问题。1807 年，傅里叶向法国科学院呈交了一篇很长的学术论文——“关于热传导的研究报告”（见图 2.2），由此开启了傅里叶分析理论的研究。这篇文章主要探讨这样一个问题，即不连续物质和特殊形状连续体，如矩形、环状、柱状和棱柱状中的热扩散问题，其三维情形的基本方程是 $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial z^2}=k\dfrac{\partial v}{\partial t}$。

当拉格朗日、拉普拉斯和蒙日阅读完这份研究报告之后，傅里叶的文章却遭到了他们三人的强烈反对。傅里叶这一研究成果不被认可的原因主要有两方面。其一，傅里叶在文章中运用三角级数

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,\mathrm{d}t+\frac{1}{\pi}\left[\cos rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos rt\mathrm{d}t+\sin rx\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin rt\mathrm{d}t\right]$$ [1]

来表示物体的初始温度，这与拉格朗日在 18 世纪中期处理弦振动问题时对三角级数的否定相矛盾，因而遭到拉格朗日的强烈反对。其二，毕奥(J. B. Biot)反对傅里叶建立的热传导方程[2]。

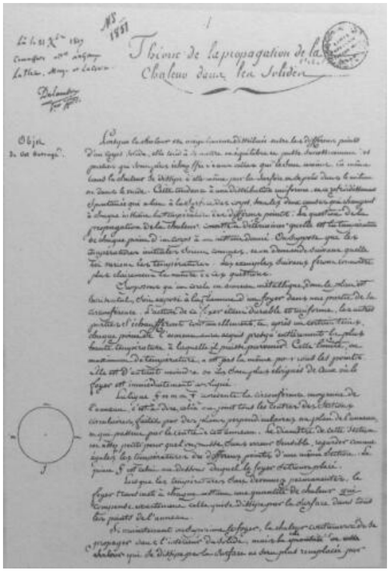


图 2.2　傅里叶于 1807 年完成的文章手稿的正文第一页

大约三年之后，为了激励数学物理学家研究固体中的热传导问题，法国科学院于 1811 年决定设奖征文。傅里叶参与了这项征文活动，并赢得了这一奖项。傅里叶提交的参赛论文正是对其 1807 年的文章加以修改的文章，文中增加了无穷大物体中热扩散的研究结果。对于无穷大物体这一情形，傅里叶之前使用的三角级数因具有周期性而不能适用于此，这启发他运用积分

$$\pi f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{d}t\int_{0}^{\infty}\cos q(x-t)\mathrm{d}q$$ [3]

来代之。虽然傅里叶的文章在竞争中获胜了，但是他的研究报告仍然因缺乏一般性和严密性而遭到批评，再一次没有得到发表。如下所言：

① 我们现在所称的傅里叶级数。

② 虽然傅里叶没有提及毕奥在 1804 年关于这一课题的研究论文，但是毕奥的文章肯定是不正确的。

③ 我们现在所称的傅里叶积分。

“……作者得到这些方程的过程存在着困难，并且他用分析工具处理这些方程时，其做法缺乏一般性和严格性。”

四年之后，他辞去爵位和官职，毅然返回巴黎，全力从事学术研究。1817年被提名为法国科学院成员，1822年在法国科学院数学部秘书德朗布尔(Delambre)去世之后被选举接替德朗布尔之职。任职之后便出版了他的获奖著作——《热的解析理论》(见图2.3)。

这部著作有三个重要贡献——一个纯数学的、两个基础物理的。在数学方面，傅里叶声称：任何单变量函数，无论是连续函数还是不连续函数，均可以展开成正弦级数。尽管现在我们知道，在没有任何限制条件的情况下，这一结论并不正确，但是傅里叶关于一些不连续函数是无限级数和的发现的确是个重大突破。显然，判断傅里叶级数何时收敛就成为有趣且重要的数学问题，狄利克雷(P. G. L. Dirichlet，1805—1859)是首个对该问题做出令人满意解答的数学家。

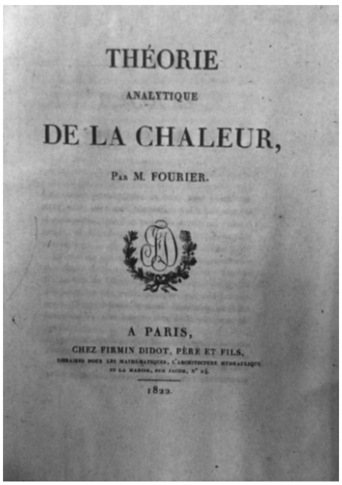


图2.3 《热的解析理论》一书

在有生之年的最后八年中，傅里叶仍然进行数学研究，发表了多篇研究成果，既有纯数学的，也有应用数学的。然而，他的热传导理论仍然受到争议。例如，毕奥称他的研究优于傅里叶；泊松(S. D. Poisson，1781—1840)不仅反对傅里叶的数学技巧，而且声称存在着另一种理论。

经典傅里叶变换需要建立在一定限制条件之下已是不争的事实。另一方面，随着人们对傅里叶变换的需求与日俱增，经典傅里叶变换要求函数 $f(x)$ 满足狄

利克雷条件且绝对可积的限制越来越成为其处理数学、物理和其他领域问题的障碍。这就显示出推广经典傅里叶变换的必要性和紧迫性，一些数学家开始尝试对其进行推广。

2.1.2　傅里叶变换的推广

瑞士数学家普朗谢雷尔(M. Plancherel，1885—1967)(见图 2.4)在其 1910 年的文章中，提出了把傅里叶变换推广到 $L^2(0,\infty)$ 空间中的普朗谢雷尔定理。在 $L^2(0,\infty)$ 空间中，由于积分 $\varphi(\mu)=\int_0^\infty f(x)\cos\mu x\mathrm{d}x$ 和 $\psi(\mu)=\int_0^\infty f(x)\sin\mu x\mathrm{d}x$ 可能不存在，因而他用表达式

$$\begin{aligned}\varphi(\mu)&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\int_0^\infty\left(\int_0^\mu f(x)\cos xv\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}x\\&=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}\int_0^\infty f(x)\frac{\sin\mu x}{x}\mathrm{d}x\end{aligned}\tag{2.1}$$

来代替。

图 2.4　普朗谢雷尔(M. Plancherel，1885—1967)

普朗谢雷尔指出, 通过表达式(2.1)定义的函数 φ 属于 $L^2(0,\infty)$ 空间，这表明 $L^2(0,\infty)$ 函数空间中元素的傅里叶变换仍然属于该空间。再者，他指出可以通过

对函数φ实施变换式(2.1)而得到函数$f(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{\infty}\varphi(\mu)\frac{\sin x\mu}{\mu}\mathrm{d}\mu$，即傅里叶逆变换公式。

诚然，普朗谢雷尔定理把经典傅里叶变换推广到了平方可积函数空间中。然而，首次对傅里叶变换做真正意义上推广的却是奥地利数学家哈恩(H. Hahn，1879—1934)(见图 2.5)，他在 1924 年德国数学学会年会上的报告中论述了这一点。在普朗谢雷尔的启示下，哈恩运用没有$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\mu}$的普朗谢雷尔公式(2.1)对傅里叶变换进行推广。虽然哈恩并没有明确指出他的研究思路源自普朗谢雷尔的工作，但是这一点可以清楚地从他参考了普朗谢雷尔 1910 年的文章中看出。

因此，哈恩考虑变换$\Phi(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin\mu x}{x}\mathrm{d}x$和$\Psi(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{1-\cos\mu x}{x}\mathrm{d}x$。如果积分$\varphi(\mu)=\int_0^{\infty}f(x)\cos\mu x\mathrm{d}x$和$\psi(\mu)=\int_0^{\infty}f(x)\sin\mu x\mathrm{d}x$中的函数$\varphi$和$\psi$存在，那么它们有各自对应的积分$\Phi(\mu)$和$\Psi(\mu)$。据此，哈恩得到了逆变换公式

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\left(\int_0^{\infty}\cos\mu x\mathrm{d}\Phi(\mu)+\int_0^{\infty}\sin\mu x\mathrm{d}\Psi(\mu)\right)$$①

图 2.5 哈恩(H. Hahn，1879—1934)

① 需要说明的是，这里所有的积分均为反常勒贝格-斯蒂尔切斯积分：$\int_0^{\infty}\cdot=\lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^{\lambda}\cdot$。

另外，哈恩在下述条件下证明了他推广的傅里叶变换的正确性及其逆变换的存在性：

(1) $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|$ 在无穷远处绝对可积；或者

(2) 函数 $f(x)$ 是周期函数与在无穷远处有界且单调的函数的乘积；或者

(3) $f^2(x)$ 在无穷远处平方可积。

从哈恩的逆公式中容易看出，如果采用现代术语，那么他的逆公式是关于拉东测度的。因此，哈恩的广义傅里叶变换比先前的推广迈出了更大的一步。按照波兰数学家博赫纳(S. Bochner，1899—1982)在 1932 年引入的术语，我们称上述变换为 1-变换。

在上述成果的基础上，哈恩继续沿着该方向开展新的研究。在 1925 年的文章中，他给出了我们所称的 2-变换，即关于斯蒂尔切斯积分的表达式

$$f(x)=\lim_{\mu\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_0^{\mu}\left(\int_0^{\lambda}\left(\cos\tau x\frac{\mathrm{d}^2\Phi_2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}+\sin\tau x\frac{\mathrm{d}^2\Psi_2(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\right)\right)\mathrm{d}\lambda$$

其中

$$\Phi_2(\mu)=2\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\sin^2\left(\dfrac{\mu}{2}\right)x}{x^2}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{1-\cos\mu x}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$\Psi_2(\mu)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{\chi[-1,1]\mu x-\sin\mu x}{x^2}\mathrm{d}x$$

其中 $\chi[-1,1]$ 是 $[-1,1]$ 上的特征函数。在假设函数 f 关于 x 连续且在无穷远处有界的条件下，哈恩证明了上述公式的存在性。显然，这里的限定条件比前面的 1-变换要弱。

继哈恩工作之后，博赫纳在推广傅里叶变换方面取得了更大进展。首先，在 1927 年的文章中，他为了求解差分–微分方程 $\sum_{\rho=0}^{r}\sum_{\sigma=0}^{s}a_{\rho\sigma}y^{(\rho)}(x+\delta_\sigma)=f(x)$ 而引入广义傅里叶积分来减弱有关解 y 的条件。随后在 1932 年的著作中，他得到了比其 1927 年的结果更为简单的广义傅里叶变换：将傅里叶变换从 2-变换推广到 k -变换。他在该著作中引入了空间 F_k ，它由所有使得 $\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{|f(x)|}{1+|x|^k}\mathrm{d}x$ 存在的函

数构成。对空间F_k中的函数f，他定义k-变换为$E(\alpha,k)\overset{k}{\approx}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\frac{e^{-i\alpha x}-L_k}{(-ix)^k}dx$，称所有$k$-变换构成的空间为$T_k$，并记为$f(x)\sim\int e^{ix\alpha}d^kE(\alpha,k)$。显然，除了该积分的复指数形式之外，当$k$为1和2时，该变换等价于哈恩的推广。

诚然，博赫纳更为一般地推广了傅里叶变换，但是逆变换仅仅在$E(\alpha,k)$具有非常好的特性下才有意义，即在无穷远处的邻域内k次可微。因此，博赫纳推广的最大遗憾之处在于：他的推广与我们所期待的傅里叶变换及其逆变换可以相互转换的性质不相符。也就是说，博赫纳的广义傅里叶变化不对称，这就要求数学家引入新的概念或方法来弥补博赫纳工作的不足，以便得到令人满意的广义傅里叶变换。从这个角度来说，傅里叶变换的推广是施瓦兹(L. Schwartz，1915—2002)引入分布概念的重要原因之一，正如他在著作《分布理论》的引言中所述：

“为处理傅里叶级数与傅里叶积分理论中依然还是十分困难的收敛性问题，非常有必要引入重要的数学工具。傅里叶级数引发了求和方法的发展，但这些方法并没有带来一个令人满意的解决方案，因为总是需要区分傅里叶级数与不是傅里叶级数的三角函数。就傅里叶积分而言，无论是以直接还是隐晦方式，广义函数的引入都是不可避免的。”

2.2 微分方程的广义解

微分方程的广义解和广义导数是施瓦兹广义函数理论产生的又一源泉。在《分布理论》的引言中，施瓦兹就强调说：

“……相当奇怪的是，完全独立于前面关于广义函数概念的讨论，上述新定义[①]早已被一点一点地引入偏微分方程的理论中。我们可以将偏微分方程$\frac{\partial^2U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2U}{\partial y^2}=0$解的一般表达式写成$U=f(x+y)+g(x-y)$；但是仅当函数$f$和$g$均二阶可导时，这样的函数$U$才满足上述偏微分方程。对于相反的情形，我

① 这里指好的导数的定义。

们约定函数U为上述偏微分方程的广义解。许多数学家都曾独立地给出过广义解的一般定义。例如，勒雷(J. Leray，1906—1998)、希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)、柯朗(R. Courant，1888—1972)、博赫纳和本人的相关工作。需要指出的是，虽然我们把函数U定义为偏微分方程$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=0$的广义解，但是我们却没有给记号$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$赋予明确的意义。同样是关于偏微分方程，基于类似的想法，索伯列夫(S. L. Sobolev，1908—1989)和弗里德里希斯(K. O. Friedrichs，1901—1982)研究了函数的广义导数。”

应该注意的是，施瓦兹在 1944 年发表了一篇关于微分方程广义解的文章，他把这篇文章视为其广义函数理论的起源。另外，他在 1945 年的文章中有这样的描述：

“为了能够给所有连续函数进行求导，我们引进了分布。但是我们引入了最少的新元素，这是因为除了连续函数的有限阶导数之外，再没有其他元素了。”

施瓦兹在微分方程广义解和函数求导问题的激励下引进了分布概念①。事实上，广义导数和偏微分方程的广义解之间并没有明确的界限，微分方程广义解概念以函数的广义微分概念为基础。许多数学家和物理学家都在研究数学物理问题时引入过广义解，如麦克斯韦和德国物理学家基尔霍夫(G. R. Kirchhoff，1824—1887)的相关工作。在得到波动方程$u_{tt}=a^2u_{xx}$的一般解$u(x,t)=f(x-at)+g(x+at)$之后，欧拉(L. Euler，1707—1783)在其著作中写道：

“在这种方式中，极其精明的达朗贝尔(J. L. R. d’Alembert，1717—1783)已经得到了完全积分。然而，他没有注意到这样一个事实，即对于引入的函数f和g，我们不仅可以让它是任意连续函数，而且可以是完全不具备连续性质的函数。”

显然，欧拉几乎得到了波动方程的广义解。自 20 世纪初开始，许多数学家开始在他们的研究工作中涉及微分方程的广义解和广义微分，到 30～40 年代便

① 施瓦兹把他引入的广义函数概念称为“分布”，后面我们将讨论他为什么采用“分布”这个名称来命名他引入的广义函数。

有一些数学家开始系统地研究线性偏微分方程的“弱解”。

一般地，如果记定义在开集$\Omega \in R^2$上且具有C^∞系数的微分算子P为$P: f \mapsto \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha f$，另外，对开集$\Omega$中的局部可积函数$f$及开集$\Omega$中支集为紧的连续函数$g$，记$\langle f, g\rangle = \int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x$；那么很容易推广拉格朗日关于伴随算子${}^tP$的定义。

特别地，如果f是开集Ω中的C^∞函数，g是开集Ω中支集为紧的C^∞函数，那么有$\langle P\cdot f, g\rangle = \langle f, {}^tP\cdot g\rangle$。若函数$f$是微分方程$P\cdot f=0$的一个$C^\infty$解，则对$\Omega$中所有支集为紧的$C^\infty$函数$g$，有$\langle f, {}^tP\cdot g\rangle = 0$。反之，若$\Omega$中的任意局部可积函数$f$满足上述性质，则称$f$是微分方程$P\cdot u=0$的弱解。应该注意到，这里对函数$f$的可导性没有做任何要求。

在不要求函数具有二阶偏导数的情况下，数学家博歇（M. Bôcher，1867—1918）建立了二维调和函数理论。作为该理论的起始性工作，他用积分关系$\oint_\tau \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s = 0$替代拉普拉斯方程$\nabla^2 u = 0$，声称这一积分关系是把调和函数运用到物理问题研究中的起点。任意调和函数满足这一条件，并且博歇指出如果对R中的所有τ，平面区域R上的C^1函数u满足上述关系，那么满足拉普拉斯方程的u必为R上的实解析函数。

博歇的学生埃文斯（G. C. Evans，1887—1973）在他的许多研究工作中用到了广义积分。他在1914年的文章中用积分关系式

$$\oint_\tau \left(\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}t + u\mathrm{d}x\right) = \iint_R f(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{2.2}$$

替代抛物型偏微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t) \tag{2.3}$$

其中，τ为围绕区域R的任意闭曲线。

埃文斯指出他的方法受到博歇1906年文章的启发，并且他的方法避免了复杂的要求，即要求偏微分$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$和$\frac{\partial u}{\partial t}$存在。倘若给原方程(2.3)应用格林公式，那

么上述积分关系式(2.2)相当于定义$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\lim\limits_{\tau\to 0}\oint_\tau \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}t+u\mathrm{d}x$，这里仅要求$u$是给定区域闭包上的可微函数，因而$u$是原偏微分方程的广义解。

意大利数学家托内里(L. Tonelli，1885—1946)在研究曲面面积的工作中定义了含有两个变量的函数的绝对连续概念。定义在$[0,1]\times[0,1]$上的函数u在托内里意义下绝对连续是指它满足以下三个条件：

(1) u 连续；

(2) 对于几乎每个x，函数$y\to u(x,y)$绝对连续；且对于几乎每个y，函数$x\to u(x,y)$绝对连续；

(3) $u(x,y)$的全变差在$[0,1]$上关于y可和。

定义在矩形区域内的函数的绝对连续定义与此类似，我们将托内里的绝对连续定义简称为 ACT。

埃文斯在他 1933 年的文章中比较了他与托内里的工作，引入了术语名称“托内里意义下的绝对连续”。在这篇文章中，埃文斯表明在他的位势函数广义导数定义中，若假设点函数连续，则可以得到托内里的绝对连续函数定义。

另外，托内里在他 1926 年的文章中引进了一类介于 ACT 类和位势函数广义导数类之间的函数类，这些“拟绝对连续”函数仅满足 ACT 定义中的条件(2)和(3)。再者，埃文斯在他 1933 年的文章中证明了他的函数类包含托内里的函数类。

埃文斯和托内里的研究工作得到了数学家莫里(C. B. Morrey)和卡尔金(J. W. Calkin)的继承与推广。莫里在他 1933 年的文章中研究了曲面面积，其中就使用了托内里的 ACT 类，他还在 1938 年的文章中应用 ACT 函数去研究拟线性椭圆型偏微分方程。

托内里借助 ACT 函数类，通过“变分法的直接方法”来研究二维偏微分方程。尽管托内里的函数类可被运用于更高维的类似问题，但是它们的使用需要满足一定的限制条件，且随着维数的增加而严格增长。这促使莫里和卡尔金寻找具有比 ACT 类更一般的收敛性质的函数类，他们选择了埃文斯在 1920 年文章中引入的函数类。虽然这类函数出现在托内里函数类之前，但是它们比托内里的函数类更一般。事实上，在此之前，卡尔金已经在他 1940 年的文章中把埃文斯位势函数广义导数的结果从两个变量的情形推广到$n\geqslant 2$个变量的情形。

从上述博歇、埃文斯、莫里和卡尔金的工作中容易看出，他们通过积分，即借助格林定理或斯托克斯定理来推广绝对连续和导数定义，这些研究成果使数学家们可以在更广泛的函数类中求解偏微分方程。

美国数学家维纳（N. Wiener，1894—1964）在研究偏微分方程计算方法时引入了导数的分布定义，他的目的在于把弦振动方程的解 $u(x+ct)+v(x-ct)$ 推广到函数 u 和 v 仅仅连续的情形中。

设偏微分算子 P 为 $P=A\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+B\dfrac{\partial^2}{\partial x\partial y}+C\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+D\dfrac{\partial}{\partial x}+E\dfrac{\partial}{\partial y}+F$，其中系数 A, B, C, D, E 和 F 是某个 C^n 函数类中的元素。首先，维纳选取定义在平面上的有界多边形区域 R 中的正 C^∞ 函数，函数 g 在该区域 R 外为零，且其所有导数在 R 的边界上的取值为零。然后他指出存在满足下述性质的函数 $\overline{g}$，即若 u 为任意一阶、二阶导数有界且属于 L^1 的函数，则 $\iint_R (Pu)g=\iint_R u\overline{g}$。接着他指出这些函数 g 的全体构成了一个完备集。在这种意义下，$Pu=0$ 的充分必要条件为对所有这样的函数 g，$\iint_R u\overline{g}=0$。因此，如果函数 u 在广义意义下满足偏微分方程 $Pu=0$，那么称函数 u 与任意这样的函数 g 正交，即 $(Pu)g$ 的积分值为零。

维纳指出他的定义比博歇 1906 年和埃文斯 1914 年文章中的定义更为一般化。首先，这是因为他不再假设函数 u 的导数存在；其次是因为，若偏微分方程 $Pu=0$ 的广义解序列 $\{u_n\}$ 收敛于函数 v，则 v 也是该偏微分方程的广义解。因此，维纳实际上引入了索伯列夫空间 $W^{2,1}$ 的等价物和我们现在所知的弱导数定义。

1937 年，柯朗和希尔伯特出版了经典合著《数学物理方法》第二卷，书中的测试函数定义是偏微分方程广义解的首个定义。他们引入广义解的目的在于：表明在双曲型微分方程中，不连续性总是沿着特征曲面出现。

柯朗研究了二阶齐次双曲型偏微分方程：

$$L[u]=\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_k}+\sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+cu=0 \qquad (2.4)$$

这里的系数 a_{ik}, b_i, c 不一定是常数。黎曼（B. Riemann，1826—1866）已经研究了它的伴随算子：$M[v]=\sum_{i,k}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_k}(a_{ik}v)-\sum_i\dfrac{\partial}{\partial x_i}(b_i v)+cv$。在二维的情形下，黎曼证明了格林定理

$$\int_G (vL[u]+uM[v])\,\mathrm{d}\overline{x}=\int_{\partial G}\sum_i\left[v\sum_k a_{ik}u_k-u\sum_k\frac{\partial}{\partial x_k}(a_{ik}v+b_iuv)\right]\frac{\partial x_i}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

虽然在定义广义解的过程中，维纳实际上已经运用了伴随算子和格林定理，但是柯朗是首个明确使用它的人。柯朗称：

“如果 u 和 v 是 $C^2(G)$ 函数，v 以及其他的一阶导数在边界上为零，u 是式(2.4)的解，则 $\int_G uM[v]\,\mathrm{d}\overline{x}=0$。”

法国数学家勒雷在研究流体运动方程时，引入了纳维–斯托克斯方程“湍流解”的思想。这些解是通过分部积分法从纳维–斯托克斯方程中得到的，需要指出的是它们不正则。随后，德国数学家弗里德里希斯在 1939 年重新独自发现了勒雷的结果。为了精确化，勒雷定义了函数 $f\in L^2(\Omega)$ 关于 x_i 的拟–导数 $g_i\in L^2(\Omega)$。

定义：若对所有函数 $\phi\in C^1(\Omega)$，且 ϕ 和 $\dfrac{\partial\phi}{\partial x_i}\in L^2(\Omega)$，有

$$\int_\Omega\left(f(x)\frac{\partial\phi}{\partial x_i}+g_i(x)\phi(x)\right)\mathrm{d}x=0$$

则称 g_i 是 $f(x)$ 的拟–导数。

就像在维纳的定义中那样，若 $f\in C^1(\Omega)$ 且 ϕ 在 Ω 的边界上取值为零，则上述公式即为分部积分公式，其中 $g_i=\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$。除此工作之外，勒雷还研究了这些拟–导数的收敛性质。倘若用我们现在的术语，那么勒雷的拟–导数函数类就是索伯列夫空间 $W^{1,2}(\Omega)$。

勒雷的拟–导数和弗里德里希斯的弱导数在本质上是分布意义下的导数，维纳在 1926 年的文章中第一次使用了“弱”导数。弱导数及其相关函数类是研究偏微分方程、曲面面积、奇异积分及其他问题的有力工具。

为了研究波动方程，法国数学家阿达马(J. Hadamard，1865—1963)提出了发散积分的有限部分概念。不久之后，匈牙利数学家里斯(M. Riesz，1886—1969)也提出了一种给发散积分赋予意义的方法，这一方法与阿达马的理论很接近。

显然，阿达马和里斯的工作也是为了求解微分方程而做出的努力。然而，索伯列夫在 1936 年为了研究双曲型偏微分方程柯西问题解的唯一性而引入的广义微分概念则是最接近分布的。索伯列夫的广义微分概念蕴含着这样的新思想：过去人们仅仅认为函数是变量之间的一种对应关系，索伯列夫则因函数可以生成泛函而把函数看做泛函。

实际上，在施瓦兹发表他的第一篇广义函数理论文章的那一年，博赫纳发表了文章“常系数线性偏微分方程”。在这篇文章中，博赫纳通过下述序列定义给出了微分方程 $\sum\limits_{r_1+\cdots+r_n\leqslant N_0} a_{r_1\cdots r_n}\dfrac{\partial^{r_1+\cdots+r_n}f}{\partial x_1^{r_1}\cdots\partial x_n^{r_n}}=0$ 的广义解定义。

定义：若满足以下两个条件，则称 $f(x)$ 是 D 中的弱解:

(1) $f(x)$ 在 D 上几乎处处有定义，且在 D 的每个紧子集上勒贝格可积;

(2) 对 D 中的任意点 x_0，存在邻域 $U=U(x_0)$，使得在 U 中，$f(x)$ 是严格意义下的解的弱极限。

从博赫纳 1946 年的这篇文章中不难看出：在施瓦兹广义函数理论被周知之前，广义解理论发展到了什么程度。另外，根据前面对博赫纳在广义傅里叶变换方面所做研究成果的讨论，我们容易知道他似乎没有发现广义傅里叶变换与广义解理论之间的关联。

第 3 章　索伯列夫与广义函数

在狄拉克函数严格化、偏微分方程广义解、广义导数和广义傅里叶变换等问题的背景下，数学家不仅意识到已有函数概念的局限性，而且为推广经典函数概念做出了许多努力，其中最有成效的方法是索伯列夫和施瓦兹引入的广义函数的泛函定义。本章首先来看索伯列夫与他的广义函数。

3.1　索伯列夫：苏联伟大的数学家、民族英雄

谢尔盖·李沃维奇·索伯列夫(S. L. Sobolev，1908—1989)(见图 3.1)是 20 世纪卓越的苏联数学家，年仅 31 岁的他便当选为苏联科学院院士，并在很长时期内是该科学院最年轻的院士。他生命中最重要的事情就是为数学、为科学、为人民服务。他在斯捷克洛夫数学研究所、库尔恰托夫原子能研究所以及西伯利亚研究所取得的卓越成就，使其得到科学工作者和苏联人民的广泛认可，获得了诸多荣誉。他获得过 3 次斯大林奖以及后来的苏联国家奖，被授予 7 个列宁勋章和十月革命勋章，赢得了最高声望的“社会主义劳动英雄”称号的公民奖励，摘取了捷克斯洛伐克科学院的金牌、银牌以及苏联科学院最高奖——罗蒙诺索夫金牌。

图 3.1　索伯列夫(S. L. Sobolev，1908—1989)

1908 年 10 月 6 日，索伯列夫出生于圣彼得堡，有位知名的律师父亲。遗憾的是，其父在他 14 岁那年便离开人世。索伯列夫的母亲在他的成长过程中扮演着重要角色，尤其是在他父亲去世之后。母亲培养他崇高的做人原则、荣辱感及坚韧意志，这对他今后的生活与工作至关重要。

孩提时的索伯列夫就表现出广泛兴趣，显露出才华。他 15 岁便完成了中学的数学、物理、化学及其他自然科学的所有必修课程，阅读了大量俄罗斯内外的经典文学著作和一些哲学、医学、生物学方面的书籍。除此之外，他还对音乐和诗歌颇具兴趣。

1925 年的列宁格勒国立大学是苏联重要的数学研究中心，它继承了圣彼得堡数学学派的数学哲学思想及优良传统。圣彼得堡数学学派是以分析见长的俄国数学家切比雪夫（P. L. Chebyshev，1821—1894）在 19 世纪后半叶创立的，它是俄国创立最早、实力最强、影响力最广且深远的数学学派，它使俄国的数学从落后境地步入世界前列。著名数学家李雅普诺夫（A. M. Lyapunov，1857—1918）和马尔可夫（A. A. Markov，1856—1922）均为其成员，后来索伯列夫也成长为它的第四代核心成员。索伯列夫顺利进入这里后，在圣彼得堡数学哲学思想以及数学名家冈瑟（N. M. Gunther，1871—1941）和斯米尔诺夫（V. I. Smirnov，1887—1974）的影响下，不仅接触到泛函分析中的新思想，而且培养了对偏微分方程的浓厚兴趣。

有一次，他对冈瑟在课堂上讲解的萨尔特科夫定理产生疑惑。在冈瑟的建议下，索伯列夫阅读了作者的原文，发现文中给出的例子与其基本定理相矛盾。冈瑟鼓励索伯列夫发表自己的例证，这激励他在 1929 年发表了其学术生涯中的第一篇学术论文“萨尔特科夫定理的注解”，从此开启了他的学术之路。

从列宁格勒国立大学毕业之后，索伯列夫继续进行偏微分方程理论的研究，取得了一定的研究成果。他先后在列宁格勒科学院地震研究所理论部门和斯捷克洛夫数学研究所工作，分别于 1932 年和 1934 年参加了两次苏联数学家大会。在第一次苏联数学家大会上，他的研究报告引起了许多数学家的关注。例如，阿达马不仅在会议期间跟他进行了交流，而且回国后写信鼓励他：

“年轻人，如果你能将你日后的研究工作相告于我，那么我将非常高兴，因为它们极度地吸引着我。”

显然，索伯列夫那时已经在偏微分方程方面做出了重要工作。数学家不仅认可他的工作，而且期待着他日后的数学才华与成就。20 世纪 30 年代初，他开始在微分方程研究的促使之下表达他的广义函数观念。1933—1936 年间，他发表了一系列关于双曲型偏微分方程柯西问题的学术论文，这些文章在现代偏微分方程理论的发展过程中扮演着重要角色。也正是在这些文章中，他通过引入广义函数概念确定了双曲型偏微分方程解的存在性和唯一性。在此基础上，他发现了索伯列夫空间及其嵌入定理。

斯捷克洛夫数学研究所是位于莫斯科的一所科研机构，是苏联科学院的组成部分，是 20 世纪世界范围内最著名的数学研究所之一。这里汇聚着一批优秀数学家，培养了许多杰出的数学大师。1921 年，物理数学研究所成立了，切比雪夫的学生斯捷克洛夫（V. A. Steklov，1864—1926）担任数学部主任。他为苏联的数学发展付出了巨大精力，曾创办了许多杂志，帮助众多数学家出版著作。1934 年，物理数学研究所被划分为斯捷克洛夫数学研究所和列别杰夫（S. A. Lebedev，1902—1974）物理研究所。同年，斯捷克洛夫数学研究所从列宁格勒搬迁至莫斯科，维诺格拉多夫（I. M. Vinogradov，1891—1983）任所长。

1939 年 9 月，第二次世界大战爆发。战争一开始，斯捷克洛夫数学研究所就从莫斯科搬迁至位于伏尔加河中部的喀山。同年 10 月，索伯列夫被任命为斯捷克洛夫数学研究所所长，直到 1944 年 2 月。1943 年春，在索伯列夫的带领下，斯捷克洛夫数学研究所回迁莫斯科。在斯捷克洛夫数学研究所期间的杰出工作不仅使索伯列夫获得了第一届斯大林奖，而且使他在 1933 年（时年 25 岁）被选举为苏联科学院通讯院士。

随后的十年时间，索伯列夫消失于数学界，隐身在苏联科学院第二实验室，全身心地投入到为了战争需要而开展的科学研究工作之中。对此，他的妻子曾回忆道：

“索伯列夫在原子能研究所工作的那段时间，他基本没有回过家，并且总是远离学术交流活动……在莫斯科的时候，他总是工作到深夜。”

这一经历，不仅使索伯列夫受到了苏联人民的爱戴，获得了来自人民给予的荣誉，而且使他在学术上取得了新的进展和成果，培养了对计算数学的兴趣。此后的十多年时间，他将其工作和科研的关注点放在计算数学之上。

晚年之时，索伯列夫献身于西伯利亚，为之倾其所有精力，直到 1984 年因身体健康问题才返回莫斯科，1989 年 1 月 3 日在莫斯科与世长辞。

为了促进西伯利亚和远东地区的发展，苏联政府颁布了一项发展决议。1956 年，一批响应苏联政府号召的爱国学者便发起倡议，提出为东部创建大的科学综合设施的计划。1957 年，该提议获苏联政府一致通过。在此基础上，苏联科学院决定创建苏联科学院西伯利亚分院，该分院包括许多研究所，其中就有数学研究所。基于索伯列夫的数学成就、个人才华以及强烈的爱国主义情怀，他被委任为西伯利亚数学研究所所长。该研究所后来被命名为索伯列夫研究所，以此纪念他在筹建时的贡献。

当时西伯利亚的科学领域是一片未被开垦过的土地，为使西伯利亚数学研究所在日后能呈现出良好和快速的发展态势，索伯列夫用一年时间在莫斯科招兵买马。1958 年，他从莫斯科移居西伯利亚，将自己的才华、生命和热情投向这片土地。令人感到惊叹与宽慰的是，他的妻子不仅没有反对他离开莫斯科的科研强地去科研贫瘠的西伯利亚，而且还给予他足够的鼓励，这来自家庭的理解与支持无疑给索伯列夫提供了强大的精神支撑。

索伯列夫为西伯利亚数学研究所的发展付出了所有心血。十年时间，他便将其领导为世界范围内的最大数学研究中心之一。他关心现代数学中所有重要领域在该研究所中的设立与发展，而不管是否是他所涉及的研究领域。例如，他自己并没有研究过控制论和经济数学，但他超强的预见能力预测到控制论的美好前景，并深知数学应用于经济在国家经济发展中的重要性。在他的不懈努力之下，最终把控制论发展为该研究所的核心分支之一，使经济数学先后在数学研究所及经济研究所中站稳脚跟。

20 世纪 60 年代在西伯利亚这一时期，索伯列夫开始向数值方法进军，尤其是插值法。对此他有这样的描述：

“从莫斯科搬迁至新西伯利亚之后，求体积公式就占据了我的整个思绪。”

在很长一段时间内，函数的近似积分问题是计算理论中的基本问题。20 世纪 60 年代，单变量函数内插法和求体积公式问题已经由欧拉、切比雪夫和伯恩斯坦(S. N. Bernstein，1880—1968)解答了。但多维情形还没有成熟的理论，这就给索伯列夫提供了科研机遇。利用先前发展的广义函数和索伯列夫空间嵌入

定理，他为求体积公式创建了一套完整且丰富的理论，并在 1974 年出版了经典专著——《求体积公式导论》。他在书中详细讨论了定义在 L_2^m 函数空间上的误差泛函的情形，把此种情况下最小化误差问题减弱为通过广义函数的线性组合来逼近已知泛函的问题，从而把求体积公式与广义函数和偏微分方程理论结合在一起。

西伯利亚时期的科研工作伴随着索伯列夫度过了他生命的第六个十年。然而，从他工作的效率和发表论文的速度来看，他仍处于科研的强壮时期。除了科研之外，他还特别关注教育，提出的“学生不是需要向里面填充东西的瓶罐，而是需要点燃的火种”的教育准则，至今仍对教育体制的实施与改革富有启发。

倘若一位数学家能在创建新理论、发展新方法、解决大问题、进行新交叉及新应用这 4 个相互关联的方面做出一个或几个杰出工作，那么他就可以被称为伟大的数学家。纵观索伯列夫的一生，他无疑是 20 世纪最伟大的数学家之一。勒雷曾评价说，索伯列夫的科研工作涉及的范围、类别及其科研成果的威力不得不让人钦佩。首先，他开辟了分析学中的索伯列夫空间及其嵌入定理的新分支，为偏微分方程理论提供了新的研究工具。其次，他利用泛函思想第一次明确引入了广义函数概念，研究了它的基本性质。在此基础上，他获得了正规双曲型偏微分方程柯西问题的一般性存在定理，这是利用泛函分析来研究偏微分方程问题新思路的体现。再者，他还应用广义函数和索伯列夫空间嵌入定理为求体积公式创建了一套完整理论，从而使函数的近似积分问题从单变量函数情形突破到多变量函数情形的研究。另外，他在库尔恰托夫原子能研究所及西伯利亚的工作彰显出其强烈的爱国情操。毋庸置疑，索伯列夫当之无愧为苏联的伟大数学家，苏联的民族英雄。

3.2　索伯列夫的广义函数工作

纵观索伯列夫的一生，他的科研领域涉及泛函分析、偏微分方程及数值方法，其中广义微商、广义函数、索伯列夫空间及其嵌入定理是近现代偏微分方程理论获得突破性进展的基石。他对偏微分方程有着浓厚兴趣，对波动方程和一般双曲型偏微分方程的发展做出了极大贡献。1933 年，他开始着手解决偏微分方程柯西问题，两年之后提出了一个求解微分方程柯西问题的新方法。正是在这个新的研究思路的激励下，他引入了他的广义函数概念——s 阶连续线性

泛函，发展了它的一些性质。在此基础之上，他把双曲型偏微分方程柯西问题推广为泛函空间中的广义柯西问题，从而证明了方程解的存在性和唯一性。

1935 年，索伯列夫在《苏联科学院报告》上发表了短篇文章“泛函空间中的柯西问题”。他在这篇文章中提出了求解微分方程柯西问题的思路，即如何通过把原问题推广到某个泛函空间中来得到一般柯西问题的存在性定理。需要强调的是，他在这篇文章中只给出了求解思路，并未对其进行证明。紧接着在一年之后，他在《数学集》杂志上发表了文章“求解正规线性双曲型偏微分方程的新方法”，文中详细论证了如何通过引入和运用泛函分析中的概念来研究双曲型偏微分方程柯西问题。

索伯列夫想要解决的问题是求解双曲型偏微分方程

$$Lu=\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{2k+1}B_i\frac{\partial u}{\partial x_i}+Cu-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=F \tag{3.1}$$

柯西问题，初始条件为

$$\begin{cases} u\big|_{t=0}=u^{(0)}(x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1}) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u^{(1)}(x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1}) \end{cases} \tag{3.2}$$

其中，A_{ij} , B_i 和 C 是关于变量 $x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1},t$ 的解析函数，F 已知，且要求 $\sum_{i=1}^{2k+1}\sum_{j=1}^{2k+1}A_{ij}p_ip_j$ 正定以保证该偏微分方程是双曲型的。

为了求解上述偏微分方程，索伯列夫先假设该方程存在解 u，再假设解 u 有界并且关于它的变量有直到 $k+1$ 阶的导数。然后通过逐次逼近法，他给出了解 u 的级数形式表达式，即 $u(M,t)=\sum_{n=0}^{\infty}J_n$，其中

$$\begin{aligned} J_0=&-\frac{1}{K}\int_{\tau(M;M^0,t^0)=0}\sum_{s=1}^{2k+1}U_s(M;M^0,t^0)\cos nx_s\mathrm{d}S_{2k+1} \\ &-\frac{1}{K}\iint_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t}\sum_{s=1}^{k}\sigma_j(M;M^0,t^0)\frac{\partial^{k-j}Lu(M,t)}{\partial t^{k-j}}\mathrm{d}R_{2k+1} \\ J_n=&\frac{1}{K}\iint_{0\leqslant\tau(M;M^0,t^0)=t}N_0^*(M;M^0,t^0)J_{n-1}(M,t)\mathrm{d}R_{2k+1} \end{aligned}$$

这里M表示$x_1,x_2,\cdots,x_{2k+1}$，M^0代表$x_1^0,x_2^0,\cdots,x_{2k+1}^0$。也就是说，$J_0$可由$u^{(0)},u^{(1)}$和$F$唯一确定，而$J_n$可递归地由$J_0$来得到。接着，索伯列夫得到了不等式$\left|J_n\right| \leqslant \dfrac{\zeta^n t^{0^{n(1-\alpha)}}}{\Gamma(n(1-\alpha)+1)}$，从而证明了级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty} J_n$收敛。

诚然，现在问题的关键就在于证明解u存在。正是为了这一目的，索伯列夫引进了函数空间Φ_S及其上的连续线性泛函ρ，考察了该连续线性泛函的一些性质，从而为证明双曲型偏微分方程解u的存在性做好了铺垫。

首先，索伯列夫引入了函数空间Φ，它由所有具有一定阶的连续导数且在有界区域V_φ外取值为零的函数构成。然后，他称函数空间Φ中所有具有直到s阶导数的元素构成了空间Φ_S。显然，函数空间Φ_S是Φ的子空间，也是索伯列夫引入其广义函数的基本函数空间。随后，他引入了函数空间Φ_S中序列φ_n的收敛定义。

定义：若函数序列φ_n满足下列两个条件：

(1) 存在包含所有V_{φ_n}的有界区域V_φ；

(2) 函数序列φ_n及其所有直到s阶的导数一致收敛于φ本身及其相应的导数，则称序列φ_n在Φ_S中收敛于φ，记为$\varphi_n \overset{s}{\Rightarrow} \varphi$。

自然地，索伯列夫定义了基本函数空间Φ_S上的泛函ρ，论证它是连续线性的。这即为索伯列夫引入的广义函数，他称为s类连续线性泛函ρ，即对Φ_S中的任意元素φ_1和φ_2，ρ满足下列线性性和连续性：

(1) $(\rho \cdot a\varphi_1 + b\varphi_2) = a(\rho \cdot \varphi_1) + b(\rho \cdot \varphi_2)$；

(2) 若$\varphi_n \overset{s}{\Rightarrow} \varphi$，则$(\rho \cdot \varphi_n) \to (\rho \cdot \varphi)$。

索伯列夫称所有s类连续线性泛函ρ构成的空间为Z_S。诚然，我们可以定义泛函空间Z_S中任意两个元素的和、Z_S中任意元素与常数的乘积，因而它是一个向量空间。在这篇文章中，索伯列夫还给出了一个s类连续线性泛函ρ的简单例子：

$$(\rho \cdot \varphi) = \iiint \rho(M) \cdot \varphi(M) \mathrm{d}R_{2k+2} \tag{3.3}$$

接着，他考察连续线性算子$L:\Phi_{S_2} \to \Phi_{S_1}$的伴随算子$L^*: Z_{S_1} \to Z_{S_2}$。它由$(L^*\rho \cdot \varphi) = (\rho \cdot L\varphi)$唯一确定，其中$\rho$为$Z_{S_1}$中的元素，$\varphi$为$\Phi_{S_2}$中的元素。借助

式(3.3)可得$\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\cdot\varphi\right)=\iiint\frac{\partial\rho}{\partial x}\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}$，再通过分部积分法可知$\left(\frac{\partial}{\partial x}\rho\cdot\varphi\right)=\left(\rho\cdot-\frac{\partial}{\partial x}\varphi\right)$。同理可由$(w\rho\cdot\varphi)=\iiint w\rho\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}$得$(w\rho\cdot\varphi)=(\rho\cdot w\varphi)$。

也就是说，算子$\frac{\partial}{\partial x}\varphi$和$w\varphi$的伴随算子为$\frac{\partial}{\partial x}\rho$和$w\rho$。这样就可以把式(3.1)中的算子$L$推广到作用在$Z_S$中的元素上。因此，现在最初的方程求解问题转化为对某一初始条件，寻找方程$Lu=\rho$的解。需要注意的是，这里u和ρ不是函数，而是泛函。下面来看索伯列夫如何通过引入新概念，把双曲型偏微分方程柯西问题转化为泛函空间中的柯西问题，即广义柯西问题。

首先，他定义不连续函数$\underline{u}=\begin{cases}u,\ t>0\\0,\ t<0\end{cases}$，它对应的泛函为

$$(\underline{u}\cdot\varphi)=\iiint\underline{u}\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}=\iint_{t>0}u\varphi\mathrm{d}\mathrm{R}_{2k+2}\tag{3.4}$$

对泛函$\underline{u}$，定义算子$L\underline{u}$为$(L\underline{u}\cdot\varphi)=(\underline{u}\cdot L^{*}\varphi)=\iiint_{t>0}uL^{*}\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}$，再通过分部积分法可得$(L\underline{u}\cdot\varphi)=\iiint_{t>0}Lu\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}+\iint_{t=0}\left\{u\Big|_{t=0}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}\varphi\right\}\mathrm{d}R_{2k+1}$。

继而结合式(3.1)和式(3.2)便有

$$(L\underline{u}\cdot\varphi)=\iiint_{t>0}F\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}+\iint_{t=0}\left\{u^{(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-u^{(1)}\varphi\right\}\mathrm{d}R_{2k+1}\tag{3.5}$$

由于式(3.5)等号右边的算子已知，从而$L\underline{u}$的值等于已知泛函ρ，因此有$L\underline{u}=\rho$，其中$(\rho\cdot\varphi)=\iiint_{t>0}F\varphi\mathrm{d}R_{2k+2}+\iint_{t=0}\left\{u^{(0)}\frac{\partial\varphi}{\partial t}-u^{(1)}\varphi\right\}\mathrm{d}R_{2k+1}$。这里泛函$\underline{u}$的基本性质保证了当$t<0$时，乘积$(\underline{u}\cdot\varphi)$不依赖于函数$\varphi$。这样，索伯列夫就建立了“广义柯西问题”，即寻找方程

$$L\underline{u}=\rho,\quad \rho\big|_{t<0}=0\tag{3.6}$$

且满足初始条件

$$\underline{u}\big|_{t<0}=0\tag{3.7}$$

的解。若这样的解$\underline{u}$存在，并且可以用式(3.4)表示，则解$\underline{u}$满足式(3.1)和式(3.2)。据此，索伯列夫就利用泛函分析中的概念及思想把双曲型偏微分方程柯西问题转化为泛函空间Z_S中的柯西问题——广义柯西问题(见图3.2)。

Considérons la fonction discontinue $\underline{u}$ qui coïncide avec la fonction u pour $t > 0$ et s'annule pour $t < 0$. Construisons la fonctionnelle correspondante

$$(\underline{u} \cdot \varphi) = \iiint \underline{u}\varphi \, dR_{2k+2} = \iiint_{t>0} u\varphi \, dR_{2k+2}. \tag{2.28}$$

Tachons maintenant de trouver l'opération $L\underline{u}$ pour cette fonctionnelle. Par définition

$$(L\underline{u} \cdot \varphi) = (\underline{u} \cdot L^{*}\varphi) = \iiint_{t>0} uL^{*}\varphi \, dR_{2k+2}.$$

En se servant de l'intégration par parties, nous obtenons

$$(L\underline{u} \cdot \varphi) = \iiint_{t>0} Lu\varphi \, dR_{2k+2} + \iint_{t=0} \left\{ u\Big|_{t=0} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} \varphi \right\} dR_{2k+1}.$$

En tenant compte de (2.26) et (2.27) nous aurons

$$(L\underline{u} \cdot \varphi) = \iiint_{t>0} F\varphi \, dR_{2k+2} + \iint_{t=0} \left\{ u^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - u^{(1)}\varphi \right\} dR_{2k+1}. \tag{2.29}$$

L'opération dans le second membre de (2.29) étant connue, nous voyons que la valeur de $L\underline{u}$ est égale à une fonctionnelle donnée ρ.

Nous avons donc

$$L\underline{u} = \rho \tag{2.30}$$

où

$$(\rho \cdot \varphi) \equiv \iiint_{t>0} F\varphi \, dR_{2k+2} + \iint_{t=0} \left(u^{(0)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - u^{(1)}\varphi \right) dR_{2k+1}. \tag{2.31}$$

La propriété essentielle de notre fonctionnelle consiste en ce fait que le produit $(\underline{u} \cdot \varphi)$ ne dépend pas des valeurs de la fonction φ pour $t < 0$.

Si nous convenons de dire qu'une fonctionnelle ρ s'annule dans un domaine D si $(\rho \cdot \varphi)$ ne dépend pas des valeurs de φ dans D, nous pouvons formuler le "problème de Cauchy généralisé":

Trouver la solution de l'équation

$$L\underline{u} = \rho, \qquad \rho|_{t<0} = 0 \tag{2.32}$$

aux conditions initiales

$$\underline{u}|_{t<0} = 0. \tag{2.33}$$

图 3.2　索伯列夫把双曲型偏微分方程柯西问题转化为广义柯西问题

自然地，索伯列夫的下一步工作是寻找式(3.6)和式(3.7)的解。正是在广义柯西问题的求解过程之中，他引入了基本函数空间Ψ_S和Ω_S，及其上的广义函数空间W_S和Y_S。为了求解双曲型偏微分方程广义柯西问题，索伯列夫通过在泛函空间中寻找算子L的逆算子来进行问题求解。也就是说，他想要证明算子L存在唯一的逆算子G。

为此，索伯列夫引入了泛函空间Z_S的子空间W_S和Y_S。空间W_S由基本函数空间Ψ_S上的所有连续线性泛函构成，而Ψ_S中的元素是支集为直双曲域的s阶连续可导函数。类似地，空间Y_S由基本函数空间Ω_S上的所有连续线性泛函构

成，而Ω_S中的元素是支撑在某逆特征锥上的s阶连续可导函数。显然，他引入的这三个基本函数空间和定义在其上的泛函所构成的泛函空间之间具有这样的包含关系：$\Phi_S \subset \Omega_S \subset \Psi_S$和$Z_S \supset Y_S \supset W_S$。

随后，应用解的显式表达式$u(M,t)=\sum_{n=0}^{\infty} J_n$和泛函分析的论证，索伯列夫得到定义在空间$Y=U_{S=0}^{\infty} Y_S$和$W=U_{S=0}^{\infty} W_S$中的算子$L$有左逆和右逆$G$，从而证明了广义柯西问题解的存在性和唯一性。

3.3 索伯列夫留下的独立创作空间

通史性著作告诉我们，索伯列夫是第一位引入广义函数的数学家，之后施瓦兹再次引入这一概念，并把它发展成一套完整理论，成为广义函数理论的奠基者。前面我们也讨论过，索伯列夫在 1936 年提出了广义函数的泛函定义，发展了它的一些基本性质，如连续性、收敛性、求导以及乘法，这显然比施瓦兹在 1945 年提出分布概念及其相关内容要早近一个年代。

倘若索伯列夫对他的广义函数工作进行系统考察和论述，那么我们现在公认的广义函数理论奠基者在很大程度上应该是索伯列夫，而不是施瓦兹。那么，索伯列夫为什么会与广义函数理论的奠基者失之交臂？现在我们就来对这一问题进行分析，这也是全面考察施瓦兹能够有幸成为广义函数理论创始人的一个重要方面。

3.3.1 研讨偏微分方程是兴趣

索伯列夫是 20 世纪后期的一位苏联数学家，是现代数学的重要创建者之一，其科学工作对 20 世纪数学产生了很大影响。他的学术贡献及活动使其闻名于世，他常常出国进行访问、交流，世界上许多国家的学院和大学都曾邀请他去讲课、做报告、参加学术会议。他是柏林洪堡大学及布拉格查理大学的名誉博士，是法国科学院、英国爱丁堡皇家学会和美国数学学会的外籍会员，还担任过西伯利亚数学杂志的总编辑和数学科学杂志的编辑。

索伯列夫对偏微分方程具有浓厚兴趣，他一生中的绝大部分科学研究工作都与求解偏微分方程有关，并取得了许多卓越成就。20 世纪 30 年代，为了研

究偏微分方程而提出的广义微商、微分方程的广义解、广义函数、索伯列夫空间及其嵌入定理是现代数学科学的重要组成部分。这一研究工作对偏微分方程理论、数学物理、函数论和泛函分析、计算数学、数学分析、弹性理论以及许多应用数学分支都有重要贡献。1935—1958 年间，他还与彼得罗夫斯基(I. G. Petrovskii，1901—1973)和吉洪诺夫(A. N. Tikhonov，1906—1993)一起开设偏微分方程研讨班，汇聚了莫斯科内外该领域的所有研究工作及成果，培养了新一代偏微分方程理论方面的专家。

索伯列夫对偏微分方程的兴趣始于大学时代，源于大学老师的激励。1924 年，他以优异成绩从圣彼得堡第 190 中学毕业之后便顺利进入列宁格勒国立大学物理数学系。大学期间，他参加了冈瑟、斯米尔诺夫和菲赫金戈尔兹(G. M. Fikhtengol'tz，1888—1959)等教授的课程。斯米尔诺夫开设的研讨班使索伯列夫学到了泛函分析的思想，这为他日后运用泛函工具来研究偏微分方程奠定了理论基础。冈瑟教授的一阶偏微分方程课程则激发了他对偏微分方程解的研究兴趣，从而使其倾注毕生的绝大部分精力于偏微分方程的研究之中。索伯列夫的大学毕业论文就是关于微分方程的研究——“具有两个独立变量的微分方程组的解析解”，这篇文章是在冈瑟的指导下于 1929 年完成的，1930 年发表在法国科学院的学报上。

大学毕业之后，索伯列夫便到列宁格勒科学院地震研究所理论部工作。在这里，他继续从事偏微分方程解析理论的研究，尤其是弹性波的传播问题，并与当时苏联数学界的领军人物斯米尔诺夫一起解决了许多波传播理论中的基本问题。为了研究弹性介质中波分布的应用问题及波动方程的函数不变解，索伯列夫开始着手讨论双曲型微分方程柯西问题，这一工作是他日后引入微分方程广义解的源泉。

1930 年 6 月 29 日，第一次苏联数学家大会在哈尔科夫召开。在这次会议上，索伯列夫提交了题为“非均匀各向同性环境中的波动方程”的报告，提出了一种求解柯西问题的新方法，这一方法能够把双曲型微分方程柯西问题转化为沃尔泰拉型积分方程的求解。从数学角度来看，它的价值在于促使索伯列夫引入了求解二阶双曲型微分方程柯西问题的索伯列夫法。从物理角度来看，它同样颇具价值，这是因为索伯列夫在该报告中详细讨论了几何光学中的基本方程——程函方程 $(\Delta\tau)^2 = C^{-2}(x, y, z)$ 。通过引入满足 $2\nabla\sigma\nabla\tau + \sigma\Delta\tau = 0$ 的辅助函

数 ρ，他把方程 $C^{-2}(x, y, z)u_{tt} - \Delta u = 0$ 的求解转化为积分方程的求解，拉开了在衍射理论中引入射线方法的序幕。

这次报告的成功之处还在于它引起了一些偏微分方程方面专家的兴趣。比如，阿达马的报告——“偏微分方程和实变函数理论”——就与索伯列夫的很相近。会后，阿达马（见图 3.3）与索伯列夫用法语对偏微分方程的相关问题进行了愉快的交流。那时，阿达马已经利用发散积分有限部分的概念，通过一个较为复杂的方法得到了二阶双曲型微分方程柯西问题的解。

图 3.3　阿达马（J. Hadamard，1865—1963）

1932 年，索伯列夫来到列宁格勒的斯捷克洛夫数学研究所工作。在这里他继续从事微分方程研究，开始发展一系列关于柯西问题的工作，开启了广义函数理论和索伯列夫空间及其嵌入定理的研究。两年后，他随同斯捷克洛夫数学研究所一同前往莫斯科，并被委任为该研究所偏微分方程部的主任。到莫斯科之后，他继续对双曲型偏微分方程进行研究，提出了一个建立在广义基尔霍夫公式基础之上的求解变系数双曲型偏微分方程柯西问题的新方法。通过探究特征锥的关系，索伯列夫把微分方程的求解转化为可由逐次逼近法求解的沃尔泰拉型积分方程，这是他研究均匀介质中波动方程柯西问题方面的新进展。

数学科学常常在人们认识世界的过程中不断取得进步，物理现象尤其是数学科学获得进展的强大动力。正是双曲型微分方程柯西问题的研究工作，促使

索伯列夫开始反思微分方程的经典解概念。波动方程$u_{xx}-u_{tt}=0$柯西问题的经典解要求解u必须二次可导并对柯西数据光滑。然而，当函数u不满足这些限定条件时，它们仍然使该问题具有现实的物理意义，这就导致问题的物理意义与数学模型之间的矛盾。

为了解决这个矛盾，索伯列夫开始考虑推广微分方程的古典解。事实上，早在索伯列夫之前已经有一些数学家考虑了微分方程广义解或弱解的概念。广义解的最早出现可以追溯到庞加莱 1894 年的文章，继而还可以在埃文斯、尼科迪姆(O. M. Nikodym，1887—1974)、维纳和弗里德里希斯等数学家的相关研究工作中找到其身影。然而，仅在索伯列夫的工作中，广义解概念才首次被详细、深入地研究和系统使用。

索伯列夫关于偏微分方程广义解的思想是在其导师冈瑟的启发和激励下产生的，这是因为冈瑟已经提出了在微分方程解的抽象定义中必然会引入集合函数的观点。对此，索伯列夫曾说道：

“我的老师冈瑟的思想和我在列宁格勒国立大学年长的伙伴科钦的思想，对我引入微分方程广义解概念具有重要启示。”

1934 年 6 月 29 日，第二次苏联数学家大会在列宁格勒召开。在这次会议上，索伯列夫进行了题为“波动方程的广义解”的报告，报告内容涉及解双曲型微分方程的新方法及波动方程的广义解。这次报告可以看成是广义函数概念的萌芽，在报告中索伯列夫指出：

“古典意义下波动方程的解构成的函数类是由二次可微函数组成的，但在许多实际问题中考虑具有很好定义的奇异型的函数似乎会更方便一些。我们引入勒贝格意义下可积的函数空间，在此空间中可以把波动方程的广义解定义为二次可微函数的极限。通过一个简单的可积准则便可得到函数为广义解的充分必要条件，并且可以建立通常意义下的解与广义解之间的关系。”

诚然，索伯列夫想通过引入函数空间来研究偏微分方程的广义解。这不仅体现出他深刻的洞察力，而且可以看成是广义函数概念的萌芽。1936 年，索伯列夫发表文章“解正规双曲型微分方程柯西问题的新方法”。这篇文章是对他 1935 年的文章“函数空间中的柯西问题”的补充与完善。在 1936 年的这篇文

章中，索伯列夫运用他独特的方法详细讨论了正规双曲型微分方程柯西问题解的存在性和唯一性，得到了方程解的一般性存在定理，使偏微分方程理论再获新进展。正是在 1936 年的这篇文章中，在双曲型微分方程柯西问题的驱动下，索伯列夫明确引入了广义函数概念，研究了它的基本性质。1936 年的这篇文章标志着广义函数概念的诞生。

令人惊奇的是，索伯列夫在引入广义函数概念及其一些性质之后并没有继续发展这一新理论，而是继续他的微分方程研究。继“解正规双曲型微分方程柯西问题的新方法”这篇文章发表之后，紧接着他在 1936 年又发表了两篇与偏微分方程相关的文章，这两篇文章是索伯列夫空间诞生的源泉。在文章“泛函分析的一个定理”中，他借助“测试函数”定义了广义微商，并在此基础上明确引入了索伯列夫空间。索伯列夫空间是一种巴拿赫空间，是研究偏微分方程广义解的理想空间。随着偏微分方程定性理论研究的需要，很多数学家在索伯列夫工作的基础上研讨了各种索伯列夫空间及其推广，以及嵌入定理、迹定理，它们已经成为讨论偏微分方程问题不可或缺的有力工具。

也就是说，索伯列夫从大学时代开始就对微分方程感兴趣，他引入的新思想、新概念及新方法都是为研究微分方程服务的，引入广义函数概念及其相关内容的目的在于证明双曲型偏微分方程柯西问题解的存在性和唯一性。事实上，索伯列夫所遵循的数学传统也是他没有继续开展广义函数相关工作的另一重要原因。

3.3.2 索伯列夫与圣彼得堡数学学派

圣彼得堡数学学派是伴随着俄国数学家切比雪夫（见图 3.4）几十年的努力而逐步形成的一个数学学派，对俄国的数学发展具有极大贡献。这是因为俄国的数学在 19 世纪之前是相当落后的，直到切比雪夫创立了圣彼得堡数学学派之后才开始逐步摆脱落后境地而走向世界前列。

数学理论与实际应用紧密结合是圣彼得堡数学学派的主要特征，它在应用数学中做出了较大贡献。这个学派认为数学思想应该包含在实际问题之中，指出任何不考查数学意义的数学家不是真正的数学家。切比雪夫强调数学的实用性，指出数学科学发展的源动力在于与实际问题相结合，把理论联系实际的观念贯穿于他的整个科学研究工作之中，他在函数逼近理论和机器设计方面做出的重要贡献就是理论联系实际最好的例证。

图 3.4　切比雪夫(P. L. Chebyshev，1821—1894)

一方面，如何描述蒸汽机中瓦特连杆运动，以便建立直动与转动互换算法的问题，激发切比雪夫提出用函数 $\max\left|f(x)-g(x,a_1,a_2,\cdots,a_n)\right|$ 作为设计的标尺。这里 $f(x)$ 表示设计的理想机器转动时其上的某一点画出的理想曲线，而 $g(x,a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 则表示工程师实际设计出来的机器得到的近似于 $f(x)$ 的曲线。也就是说，设计的标尺是理想曲线与实际曲线之差绝对值的最大值，它是关于参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的函数。

诚然，我们想要寻找 $\max\left|f(x)-g(x,a_1,a_2,\cdots,a_n)\right|$ 取最小值时的那组参数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，而这就是函数逼近理论所要考察的核心问题。由此，切比雪夫便在函数逼近这一课题上做出了很多卓越工作，获得了显著的科研成果，如函数逼近理论中的切比雪夫多项式、切比雪夫定理和切比雪夫逼近等。

另一方面，切比雪夫运用他提出的数学工具建立了许多机器设计方面的算法，继而利用这些算法来设计并制造机器，他的很多发明都引起了人们的兴趣，赢得了大家的赞赏。他建立的机器设计理论有制动机理论，连续运动变间断运动理论，最简平行四边形法则，离心控制器原理等。他毕生之中设计的机器多达 40 多种，如步行机、划船机、压力机以及自动椅等。

毫无疑问，切比雪夫在函数逼近理论方面的工作得益于实际问题的激励。反过来，他创建的新理论又被运用于实际问题，在实际应用中得到检验。切比

雪夫强调的理论联系实际的观念是一种朴素唯物主义思想，这一思想不仅是切比雪夫进行科学研究工作所坚守的基本信念，也是圣彼得堡数学学派各个成员开展科研工作的指导思想。1865 年，切比雪夫在圣彼得堡大学做了题为“论地图的建制”的报告。在该报告中，他这样强调理论联系实际的观点：

“如果理论与实践相结合，那么就会产生好的结果。一方面，实践活动会从中获得好处；另一方面，理论自身也会因此激励而得以发展。”

索伯列夫是圣彼得堡数学学派第四代的重要成员，他的科学研究活动受到圣彼得堡数学学派学术风格的深刻影响，尤其是理论联系实际的观点。圣彼得堡数学学派对索伯列夫的熏陶从其大学时代就开始了。一方面，索伯列夫于 1925 年开始在列宁格勒国立大学学习时，这所大学就是苏联重要的数学研究中心，它继承了圣彼得堡数学学派的优良传统。这就首先使索伯列夫处于圣彼得堡数学学派这一大数学环境中，使他有机会受到这里的学术熏陶。

另一方面，索伯列夫在列宁格勒国立大学有幸直接受到大数学家及圣彼得堡数学学派主要成员的教导，而圣彼得堡数学学派的成员都继承并发展了该学派的数学哲学思想，形成了一致的科研风格。这为索伯列夫日后的职业生涯做了很好的铺垫，同时也影响着他日后的科学研究方向及风格。索伯列夫大学时期的两位老师冈瑟和斯米尔诺夫对索伯列夫成长为一位伟大科学家具有极大影响，然而这两位老师均为斯捷克诺夫的学生，而斯捷克诺夫是李雅普诺夫的学生。这四位教授均是圣彼得堡数学学派的杰出成员，他们都继承了圣彼得堡数学学派的数学哲学思想，尤其是理论联系实际的精神。例如，正是对旋转液体平衡条件的研究使李雅普诺夫建立了运动稳定性理论，这再次论证了圣彼得堡数学学派理论联系实际的数学研究思路。

再者，对具体的数学科研工作，索伯列夫的这四位老师都对微分方程理论、偏微分方程理论以及它们在数学物理和力学中的应用进行了大量研究。李雅普诺夫是一位俄国数学家，他与师兄马尔可夫是切比雪夫最著名且最具才华的两个学生，可谓是切比雪夫的左右手。李雅普诺夫于 1876 年考入圣彼得堡大学数学系，并在这里取得博士学位。1893 年，他晋升为教授，并于 1901 年当选为俄罗斯科学院院士。李雅普诺夫对位势理论进行了深入研究，他在微分方程定性理论和天体力学方面的工作使他赢得了国际声誉，其创立的微分方程稳定性

理论尤其具有深远影响。斯米尔诺夫不仅是索伯列夫的老师，而且还是索伯列夫职业生涯当中的合作伙伴。索伯列夫从列宁格勒国立大学毕业之后，在地震研究所工作时就与斯米尔诺夫一起研究了许多波传播理论中的基本问题。冈瑟更是在大学时代就激发了索伯列夫对微分方程的兴趣，使其毕业论文就是关于微分方程解的研究。

据此，通过上述分析便不难理解为什么索伯列夫从大学时期开始就致力于微分方程理论的研究，以及为什么他的研究内容都是从实际问题中抽取出来的、非常实用的数学问题。圣彼得堡数学学派的熏陶使索伯列夫获得了理论与实际密切联系的数学哲学思想，而时代背景赋予的国家更加需要激励他把这一观念贯穿于他毕生的科学研究工作之中。

3.3.3　时代背景赋予的科研使命

索伯列夫在引入广义函数概念之后不久，第二次世界大战就爆发了，这一历史背景使他从事与非常重要的实际问题有关的数学研究。在 1943—1953 年这十年间，索伯列夫消失于数学界并被禁止与外界进行交流，就连他的妻子也不知道他具体在什么地方、做什么事情。这是因为这一时期他隐身在第二实验室，成为苏联物理学家库尔恰托夫（I. V. Kurchatov，1903—1960）（见图 3.5）的得力助手，从事与实际应用直接相关的数学活动。

图 3.5　库尔恰托夫（I. V. Kurchatov，1903—1960）在镭研究所（20 世纪 30 年代中期）

1939 年 9 月，第二次世界大战爆发。1943 年 2 月，苏联科学院第二实验室成立了，用以研发核能源、研制核武器。第二实验室就是我们现在熟知的库尔恰托夫原子能研究所（见图 3.6），它是苏联在核能领域的主要研发机构，是苏联

绝大多数核反应堆的研发之地。在库尔恰托夫的领导下，第二实验室建造出第一台回旋加速器、欧洲第一座原子反应堆、苏联第一颗原子弹和氢弹以及世界上第一座原子能发电站。这些成绩使库尔恰托夫获得了苏联人民的一致认可，荣获了“社会主义劳动英雄”称号。

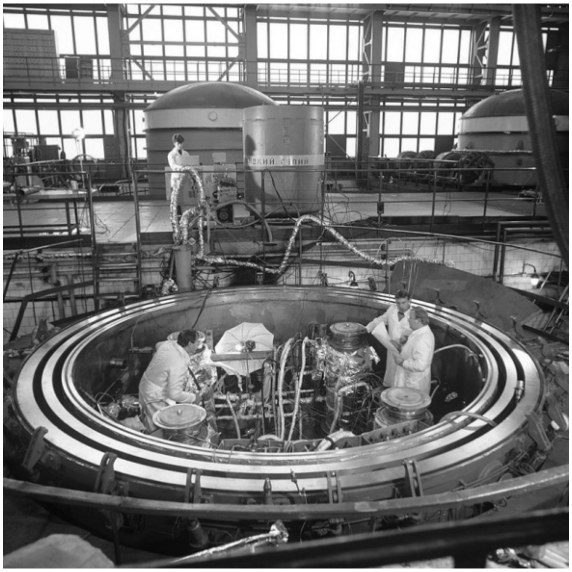


图 3.6 库尔恰托夫原子能研究所的用于测试磁系统的设备

在军事应用以及爱国情怀的激励下，索伯列夫在库尔恰托夫原子能研究所建立之初便来到这里工作，成为库尔恰托夫的得力助手，在库尔恰托夫的带领下开始进行核武器的研制。因此，在 20 世纪 40 年代，索伯列夫的研究工作为在军事应用激励下进行的描述旋转流体微小振荡的微分方程组的研究。他得到了空腔充满物体的旋转体的稳定条件，指出这些条件与空腔形状和参数有关，还详细研究了空腔为柱面或旋转椭球面的情形。这些研究工作为高阶微分方程(组)柯西问题及边值问题的一般理论研究提供了启示。

索伯列夫一生中伟大的时刻都与库尔恰托夫原子能研究所有关。首先，他在这里与库尔恰托夫一起研究原子能的使用问题。他的主要工作是研究为了得到受条件限制的核燃料的复杂系统，以及该复杂系统的一般结构和稳定性问题，这些问题基本都会涉及数学物理方程。为了解决这些问题，索伯列夫必须先从整体上理解所有物理过程，然后建立数学模型，再利用很少的计算工具来求解

这些重要的实际问题。为了计算、最优化以及预测，他必须处理纯粹的应用数学问题，在这个过程中他需要解决从来没有人研究过的极为复杂的程序。

在研究之初，这里没有计算机。为了在有限时间内利用很少的计算工具获得所需的数值结果就需要非凡的直觉力，不断创造新技术并付之巨大努力。因此，这一时期是索伯列夫和研究所其他科学工作者的强烈创造性时期。这里的每位科学工作者都深知自己正在努力完成的任务是国家的重要事情，研究所的每位科学家都倍感个人职责与国家命运息息相关。索伯列夫更是全身心地投入其中，对此竭尽所能。

据此可知，当施瓦兹开始发展分布理论之时，索伯列夫已经离开了这个舞台。他没有继续从事这方面的研究，尽管他与斯米尔诺夫的一些工作已经离分布理论不远了。另外，这一时期的研究工作培养了他对计算数学的兴趣，使他在此之后研究计算数学，从而便与广义函数理论渐行渐远。这就给施瓦兹留下了独立的发展空间，主要遗留下来的部分是傅里叶变换及分布空间三大结构的研究。

第二次世界大战期间及战后的一段时期内，计算数学得到了飞速发展。索伯列夫也积极参与到这个领域的研究当中，他是首次预见计算数学和控制论前景及其重要性的苏联数学家之一。他在计算数学方面的兴趣应归功于他在库尔恰托夫原子能研究所的工作，如他所言：

“原子能研究所的工作培养了我对计算数学的兴趣，使我了解到计算数学的非凡前景。因此，当彼得罗夫斯基邀请我担任莫斯科国立大学计算数学部主任之时，我便欣然应邀了。”

这使他在 20 世纪 50 年代初便将其科研重心转向计算数学，并且在 1952—1960 年期间担任莫斯科国立大学数学力学院计算数学部主任。莫斯科国立大学计算数学部是苏联在 1949 年创建的第一个计算数学部，它现在的学科思想和教学法在本质上均由索伯列夫所创立，并且这个部门在当今数学的许多分支领域发展中仍发挥着重要作用。为了解决计算数学问题，他广泛应用泛函分析、偏微分方程和函数论工具。在他的研究中，计算数学问题常常被作为泛函分析问题而提出。

另外，在库尔恰托夫原子能研究所，索伯列夫撰写了《泛函分析在数学物理中的应用》这本经典之作，其内容以他在莫斯科国立大学授课的讲稿为基础，

书中充满了他的数学思想与方法。这部著作在该领域及偏微分方程理论的发展中具有极为重要的作用，如斯米尔诺夫评价道：

“这本著作有效地把函数论和泛函分析的现代思想与方法应用到了偏微分方程的研究之中。”

从泛函角度考察偏微分方程理论中的许多问题是索伯列夫撰写这本著作的目的。他先在书中考察泛函分析中的一些问题，如 p 幂可积函数空间的基本性质及其上的泛函、广义微商、索伯列夫空间及其嵌入定理等。在此基础上，他探讨变分法在拉普拉斯方程、多重调和方程以及线性、拟线性双曲型微分方程柯西问题中的应用。这部著作第一次对广义函数理论的基础以及它们在二阶双曲型偏微分方程问题求解中的应用进行了解释，标记了书中第一次提到的相关问题的进一步发展和目前的研究情况，成为不止一代数学工作者的必读之物，并且成为他们创作的灵感源泉。自 1950 年首次出版到现在，它先后被翻译成多国语言，成为许多地方的教科书，其经典之处再次被印证。

第 4 章　施瓦兹的广义函数概念

索伯列夫在 1936 年引入了广义函数的泛函定义，它实质上是一个有限阶连续线性泛函。索伯列夫之所以在具有 s 阶导数的函数空间上定义广义函数，是因为他想要求解双曲型偏微分方程。约十年之后，施瓦兹于 1945 年再次运用泛函思想对古典函数概念进行了推广，引入了分布概念。分布概念的提出不仅解释了狄拉克函数存在的合理性，而且还解决了连续函数的求导问题，同时为定义广义傅里叶变换做好了铺垫。这一章我们就来考察施瓦兹提出分布概念的灵感是什么？他是如何提出这一概念的？他为什么要称其引入的广义函数概念为分布以及他的广义函数概念与索伯列夫的理论有什么异同？

4.1　必要数学工具的出现

为了更加清晰地了解施瓦兹广义函数概念及其理论的来龙去脉，我们有必要先来考察他开展广义函数工作所必需的数学工具。

20 世纪 30 年代，泛函分析作为一门学科被建立起来，这为施瓦兹建立分布理论提供了必不可少的数学素材，如泛函、对偶等思想，尤其是拓扑向量空间理论。再者，基于波兰数学家巴拿赫（S. Banach，1892—1945）在 1932 年出版的经典专著《线性算子理论》，施瓦兹在巴拿赫建立的线性算子理论基础上发展了局部凸拓扑向量空间的对偶理论，这一成果为他发展分布理论提供了强有力的数学支撑。另外，局部紧空间上的拉东测度和法国数学家韦伊（A. Weil，1906—1998）的卷积工作也是施瓦兹创建分布理论的必要数学工具。

4.1.1　拉东测度和卷积

20 世纪 40 年代初，布尔巴基学派和嘉当挑选出了一类测度，它不是关于集合的函数，而是与定义在 R^n 上支集为紧的连续函数 ϕ 联系在一起的运算 $\mu(\phi)=\int\phi(x)\mathrm{d}\mu(x)$。如果记 $K(R^n)$ 是由所有支集为紧的实连续函数 ϕ 构成的向量

空间，那么 R^n 上的实拉东测度就是满足下列两个条件的从 K 到 R 的映射 μ：

(1) μ 是线性的，即对 $\alpha,\beta\in R$ 和 $\phi,\psi\in K$，有 $\mu(\alpha\phi+\beta\psi)=\alpha\mu(\phi)+\beta\mu(\psi)$；

(2) 对 R^n 的每个紧子集 K，存在大于零的数 M_k，使得每当函数 ϕ 的支集包含在 K 中时，便有 $|\mu(\phi)|\leqslant M_k\max|\phi(x)|$。

也就是说，拉东测度被定义成支集为紧的连续函数构成的空间上的连续线性型，它被看成质量分布、电荷分布等物理概念的数学基础。另外，布尔巴基学派奠基者之一的韦伊把局部紧群 G 上的拉东测度定义为空间 $C_{\text{comp}}(G)$ 上的线性型。这一思想启发施瓦兹用更小的支集为紧的无穷可导函数空间 D 替代这里的向量空间 K，用“连续”取代这里的条件(2)，从而获得了不仅包含狄拉克函数 δ，而且包含狄拉克函数的导数 $\delta^{(k)}$ 的新数学对象——分布。

卷积不但是施瓦兹广义函数理论的核心内容之一，而且是他发展广义函数理论的有效工具。施瓦兹对卷积的深刻理解和灵活运用应归功于韦伊，这是因为在他发展分布理论之前，韦伊就对卷积进行了细致考察和广泛应用，引入了局部紧阿贝尔群上的对偶和卷积。韦伊的这些工作集中体现在他 1940 年的著作《拓扑群上的积分及应用》(见图 4.1)中，它对施瓦兹有着很大帮助。正是基于对韦伊《拓扑群上的积分及应用》这部著作的研读，施瓦兹才对卷积有了深刻理解，才能使他在发展广义函数理论之初想到用卷积算子推广古典函数概念。

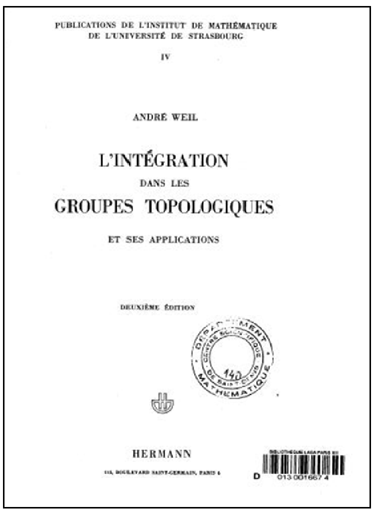


图 4.1 《拓扑群上的积分及应用》一书

4.1.2　拓扑向量空间的对偶理论

泛函分析研究无穷维线性空间及其上的泛函和算子，主要研究对象是函数空间。用泛函分析处理经典数学问题这一做法在施瓦兹广义函数理论中尤显重要，它的建立为施瓦兹发展广义函数理论提供了坚实的理论基础。事实上，施瓦兹在发展广义函数理论之前，当他在撰写关于指数和的博士论文时就已经利用泛函分析的方法来解决古典的近似问题。

变分法的研究孕育了泛函思想——函数的函数，意大利数学家沃尔泰拉（V. Volterra，1860—1940）和阿达马率先在变分法的研究过程中开创了泛函的抽象理论。沃尔泰拉提出了线的函数及其相关演算。阿达马在 1897 年提出可以把曲线视为集合的元素，在研究偏微分方程的过程中考虑了所有定义在闭区间 $[0,1]$ 上的连续函数构成的函数族，并发现这些函数构成了一个无穷维线性空间，继而在 1903 年定义了该函数空间上的函数——泛函[①]。

在集合论基础上，法国数学家弗雷歇（M. R. Fréchet，1878—1973）用抽象语言综合了沃尔泰拉、阿达马等前人的研究思想和成果，得到了函数空间和泛函抽象理论的第一个卓越成果，这集中体现在他 1906 年的博士论文“关于泛函演算的一些问题”中。诚然，在集合论影响下，“空间”和“函数”这两个概念得到了进一步发展。“空间”被视为具有某种结构的某类元素的集合，这里的元素可以是任何抽象对象。与之相适应，“函数”则被推广为从一个空间到另一个空间的映射，将函数空间映射到实数域或复数域的对应关系就是泛函。

20 世纪 20 年代到 40 年代，泛函分析逐步发展成一门学科。巴拿赫（见图 4.2）不仅把希尔伯特空间推广为更一般的巴拿赫空间，用“范数”取代“内积”来定义距离和收敛；而且引进了巴拿赫空间的对偶空间或伴随空间概念：由已知空间上所有有界连续线性泛函构成的空间，建立了巴拿赫空间上的有界线性算子理论，证明了泛函分析中的许多重要定理，从而为泛函分析的进一步发展奠定了基础。

在很大程度上，巴拿赫建立了一般局部凸空间理论。但是在施瓦兹建立广义函数理论之前，这一理论一直没有找到它的重要应用之地。可以毫不夸张地

① “泛函”这一术语就是由阿达马提出的。

说，施瓦兹的广义函数理论很好地显示出巴拿赫建立局部凸线性空间的实用价值。广义函数理论以局部凸线性空间的系统研究为基础，其中经常会用到巴拿赫空间中的一些经典定理，如巴拿赫-斯坦因豪斯定理和哈恩-巴拿赫定理。另外，里斯表示定理也对施瓦兹的研究工作具有一定的帮助。

图 4.2　巴拿赫(S. Banach，1892—1945)

在发展广义函数理论之前，施瓦兹做了一些关于拓扑向量空间的研究工作，这对他日后发展广义函数理论具有很大帮助，它是施瓦兹发展广义函数理论的理论基础。施瓦兹熟知拓扑向量空间理论这件事应归功于迪厄多内(J. A. E. Dieudonné，1906—1992)(见图 4.3)，这是因为他在迪厄多内的课堂上习得了这一新知。1942 年，迪厄多内发表文章“拓扑向量空间中的对偶”，这是一篇极为重要的关于赋范线性空间对偶的文章。仅仅作为学习之后的一个练习，施瓦兹把迪厄多内这篇文章的结果推广到弗雷歇空间上，得到了更为一般的对偶理论。对偶理论在施瓦兹创建广义函数理论的过程中有着非常重要且直接的作用，这一点可以清晰地从后文关于施瓦兹引进测度泛函定义、分布概念以及分布的导数、代数结构及其傅里叶变换的过程中看到。

1943 年，施瓦兹考察了局部凸拓扑向量空间的对偶理论，发现了一些有趣的结果。他研究向量空间的对偶并在其上赋予强拓扑和弱拓扑，引进了拓扑向量空间中的有界集概念，在一般拓扑向量空间中考察了哈恩-巴拿赫定理和巴拿赫-斯坦因豪斯定理，以及二次对偶和向量空间的自反性。作为一个例子，施瓦兹研究了定义在闭区间$[0,1]$上的无穷可导函数构成的拓扑向量空$E = C^{\infty}([0,1])$。

诚然，空间E与支集为紧的无穷可导函数空间$D = C^{\infty}_{\text{comp}}$很接近。但是由于

它是一个弗雷歇空间，因而它要比空间 D 简单。接着，施瓦兹研究了拓扑向量空间 E 的对偶 E'。与空间 E 不同的是，其对偶空间 E' 要比空间 D 的对偶 D' 复杂，这是因为空间 E' 是闭区间 $[0,1]$ 上或 R 上支撑在 $[0,1]$ 上的分布空间。再者，施瓦兹发现拓扑向量空间 E 及其对偶 E' 是自反的。

图 4.3　迪厄多内（J. A. E. Dieudonné，1906—1992）

施瓦兹广义函数理论中的空间常常不是巴拿赫空间，而是弗雷歇空间，甚至是更为复杂的弗雷歇空间的正向极限以及这些空间的对偶空间。在巴拿赫空间及其对偶空间的理论基础上，施瓦兹把巴拿赫空间的对偶理论推广到弗雷歇空间中，在弗雷歇空间中引入了邻域概念，定义了其对偶空间上的强对偶拓扑，并且他知道全纯函数空间和无穷可导函数空间就是两个重要的弗雷歇空间。尽管施瓦兹并没有发表过关于抽象泛函分析的研究成果，但是它们已经在施瓦兹需要的时候为他提供了极为方便的工具。例如，施瓦兹在定义卷积算子与支集为紧的无穷可导函数空间的乘积时，他就先利用其早期在弗雷歇空间研究工作中关于 $D_k(R^n)$ 的邻域的内容，证明了任意卷积算子在局部上是一个连续函数的 n 阶导数，从而在此基础上逐步定义了其乘法运算。

一旦在测试函数空间 D 上引入拓扑概念，它便成为一个拓扑向量空间。通常，数学家也将拓扑向量空间的对偶变成另一个拓扑空间。事实上，巴拿赫空间上的有界线性算子理论已经告诉我们：完备赋范线性空间的对偶空间仍是一个巴拿赫空间。但是测试函数空间 D 不是赋范线性空间，因而这一做法在此

毫无意义。然而在拓扑向量空间中，数学家用有界集取代巴拿赫空间中的单位球。受此激励，施瓦兹在测试函数空间 D 中有界集的基础上，恰当地定义了分布空间 D' 的拓扑，这样分布空间 D' 就是测试函数空间 D 的拓扑对偶空间。

“分布”概念的提出激发起数学家对拓扑向量空间的兴趣。在 1950 年之前，泛函分析学家主要研究赋范空间，仅有一小部分论文是关于不可赋范空间的。施瓦兹与迪厄多内合作的文章“空间 (F) 和 (LF) 的对偶”的发表在一定程度上表明拓扑向量空间的一些结果对于分布理论的重要性。由此，紧随迪厄多内和施瓦兹的这篇文章，《傅里叶研究所年鉴》在 1950 年又发表了布尔巴基学派关于拓扑向量空间的研究论文——“一些拓扑向量空间”。几年之后，犹太裔数学家格罗滕迪克（A. Grothendieck，1928—2014）分别在 1954 年和 1955 年发表文章“空间 (F) 和 (DF)”与“拓扑张量积和核空间”。至此之后，大量关于拓扑向量空间的研究论文便出现了。

4.2 施瓦兹的广义函数

狄拉克函数的严格化、经典傅里叶变换的推广以及偏微分方程广义解的确切含义等问题刺激数学家引入新的数学对象。施瓦兹正是在这些问题的激励之下引入了他的广义函数概念，微分方程的广义解是他引入分布概念的灵感源泉，狄拉克函数的严格化是他大脑之中一直想要解答的问题，而傅里叶变换的推广则更进一步地激励他最终把经典函数概念推广为连续线性泛函。

施瓦兹在萧凯（G. Choquet，1915—2006）1944 年发表的文章的激励下，探讨了偏微分方程广义解问题，这一工作使他引入了卷积算子的定义，开启了他的广义函数工作。在卷积算子定义的基础上，他发现了卷积算子的一些优秀性质，发展了卷积算子的一些运算，并在很长一段时期内以卷积算子为对象进行数学研究。然而，当他在 1945 年 2 月发展卷积算子傅里叶变换时，遇到了无法克服的困难，恰是这一问题促使他改进了他的广义函数概念，得到了我们现在熟知的分布概念。

4.2.1 施瓦兹的卷积算子

洛朗 • 施瓦兹（L. Schwartz，1915—2002）（见图 4.4）生于第一次世界大战期间，是 20 世纪因创建广义函数理论而闻名于世的法国数学家，获得过三次法国

科学院奖项，1974 年还被评选为法国科学院院士。他是第二代布尔巴基学派的主要成员，是第二次世界大战期间受布尔巴基学派影响而成长起来的数学家，也是第一位获得菲尔兹奖的布尔巴基成员。除在数学科学方面的贡献之外，他还是一位有名的政治活动者、教育家，并且从孩提时便对蝴蝶具有浓厚兴趣，一生中共收藏了两万多只蝴蝶标本。

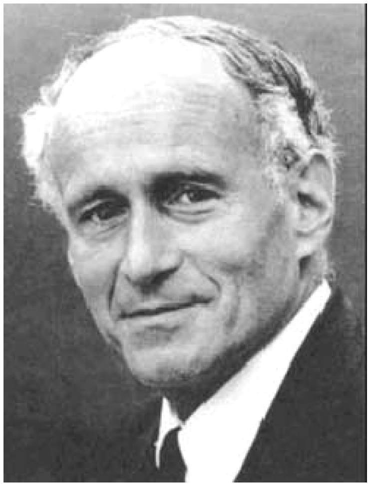


图 4.4　施瓦兹(L. Schwartz，1915—2002)

施瓦兹在数学上最大的成就莫过于在 1945 年引入的广义函数概念基础上建立了广义函数理论，这一工作使他在 1950 年获得了菲尔兹奖(见图 4.5 和图 4.6)。施瓦兹的思维极其活跃，他是一个敢于冲破传统和教条的人。正是这一优秀品质使他突破了经典函数概念的局限性，提出了分布概念，创建了分布理论，从而为许多近现代数学以及物理学的分支领域取得突破性进展提供了基本保障与有力工具。著名数学家和数学史家迪厄多内把施瓦兹的分布理论贡献等同于牛顿和莱布尼茨在微积分学方面的贡献，由此可见他这一工作的重要性及其贡献之大。

年少时，施瓦兹先是喜欢拉丁语和希腊语，随后又热衷于物理、化学等自然科学以及几何学、分析学等数学学科。1934 年，他考入巴黎高等师范学校，1937 年毕业之后便到斯特拉斯堡大学攻读博士学位。第二次世界大战的爆发导致他的博士学习生活有所中断，直到 1943 年才以“实指数和的研究”这一毕业论文获得了博士学位。随后，他先后在格伦堡理学院、南锡大学理学院、巴黎大学和巴黎综合工科学校执教。

图 4.5 菲尔兹奖的奖章正面

图 4.6 菲尔兹奖的奖章背面

1944 年，也就是在他博士刚刚毕业之后，施瓦兹有幸遇到萧凯的文章——“调和函数和多重调和函数的一些平均特征性质”。在这篇文章的启发下，他开启了广义函数工作。萧凯这篇文章的目的之一是考察 n 维欧式空间上具有下述性质的连续函数，即由连续函数所有欧式变换的线性组合构成的集合在整个连续函数空间中不稠密。萧凯论证：

设 F 是关于 n 个变量的函数，且在区域 D 中连续。若存在支撑在 R^n 的紧子集 E_0 上的质量分布 λ_0，使得对所有与 (E_0,λ_0) 相似的质量分布 (E,λ)，有 $\int_E F\mathrm{d}\lambda=0$，则称 F 是多重调和的。

也就是说，萧凯发现上述那些连续函数是多重调和的。就像在没有假设函数可导的前提下可以通过球面平均值定义调和函数一样，他在事先未假设函数可导的情况下运用迭代平均值引入了多重调和函数的定义。阅读完萧凯的这篇文章之后，施瓦兹立刻想到该如何对它进行推广，正如他在自传《与时代拼搏的数学家》中所言：

“我立即想到如何推广他的文章：取代相似变换，我仅仅选取了平移和位似。但由此迭代拉普拉斯算子不得不被任意常系数微分算子所取代。具有下述性质的函数 f，即它们的所有平移和位似变换不能构成整个空间，是某一常系数微分方程 $P(D)f=\sum_p a_p D^p f=0$ 的广义解。”

的确，在萧凯的那篇文章之后，施瓦兹在同年发表了一篇仅四页长的文章，

它由一个定义和两个定理构成。首先，施瓦兹在这篇文章中定义了常系数线性偏微分方程的广义解(见图 4.7)。

定义：若连续函数$U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$在紧集上是方程

$$\sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=m} a_{p_1, p_2, \cdots, p_n} \frac{\partial^m U}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\cdots(\partial x_n)^{p_n}} = 0 \tag{4.1}$$

通常意义下解的一致极限，则称函数$U(x_1, x_2, \cdots, x_n)$是上述常系数偏微分方程的广义解。

Définition. — On dit qu'une fonction continue $\mathrm{U}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est solution généralisée de l'équation aux dérivées partielles à coefficients constants non tous nuls

$$\text{(1)} \qquad \sum_{p_1+p_2+\ldots+p_n=m} a_{p_1,p_2,\ldots,p_n} \frac{\partial^m \mathrm{U}}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\ldots(\partial x_n)^{p_n}} = 0$$

si elle est limite uniforme sur tout compact de solutions vraies de cette équation.

图 4.7　施瓦兹定义的广义解概念

他注意到波动方程$\dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$有广义解$f(x+y)+g(x-y)$，其中$f$和$g$为连续函数。他还注意到拉普拉斯方程的所有广义解是通常意义下的解。接着，他论证了下述定理。

定理：对n维空间紧集K上以$x_1, x_2, \cdots, x_n$为变量的非基本连续函数组$U(\lambda x_1+\varepsilon_1, \lambda x_2+\varepsilon_2, \cdots, \lambda x_n+\varepsilon_n)$，当$\lambda$和$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$取所有可能实值时，$U$(当且仅当$K$的内部非空时)必定至少是一个形如式(4.1)的偏微分方程的广义解(见图 4.8)。

Théorème. — *Pour que le système de fonctions continues*

$$\mathrm{U}(\lambda x_1+\xi_1, \lambda x_2+\xi_2, \ldots, \lambda x_n+\xi_n)$$

des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *soit* non fondamental (1) *sur un compact* K *de l'espace à n dimensions, lorsque* λ *et* $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, *prennent toutes les valeurs réelles possibles, il faut (et il suffit si l'intérieur de* K *n'est pas vide) que* U *soit solution généralisée d'au moins une équation aux dérivées partielles du type* (1).

图 4.8　施瓦兹关于偏微分方程存在广义解的定理

这个定理的充分性较易证明，这里主要来看施瓦兹是如何证明它的必要性的。若连续函数组$U(\lambda x_1+\varepsilon_1, \lambda x_2+\varepsilon_2, \cdots, \lambda x_n+\varepsilon_n)$不是基本的，则根据哈恩-巴拿赫定理和里斯表示定理，存在不为零的质量分布$\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使得对所有实值$\lambda$和$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$，有$\int U(\lambda x_1+\varepsilon_1, \lambda x_2+\varepsilon_2, \cdots, \lambda x_n+\varepsilon_n)\,\mathrm{d}\Phi(x_1, x_2, \cdots, x_n)=0$。若函数$U$与$\rho$做卷积，则可得函数$V$，即

$$\begin{aligned}&V(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int U(x_1+u_1,x_2+u_2,\cdots,x_n+u_n)\rho(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\cdots,\mathrm{d}u_n\\&=\int U(u_1,u_2,\cdots,u_n)\rho(u_1-x_1,u_2-x_2,\cdots,u_n-x_n)\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\cdots,\mathrm{d}u_n\end{aligned}$$

倘若ρ是支集为紧的无穷可导函数，那么上述积分有意义，并且函数V无穷可导。再者，函数V满足下述方程

$$\begin{aligned}&\int V(\lambda x_1+\varepsilon_1,\lambda x_2+\varepsilon_2,\cdots,\lambda x_n+\varepsilon_n)\,\mathrm{d}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\\&=\int\Big[\rho(u_1,u_2,\cdots,u_n)\mathrm{d}u_1,\mathrm{d}u_2,\cdots,\mathrm{d}u_n\times\\&\quad\int U(\lambda x_1+\varepsilon_1+u_1,\lambda x_2+\varepsilon_2+u_2,\cdots,\lambda x_n+\varepsilon_n+u_n)\,\mathrm{d}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\Big]\\&=0\end{aligned}\tag{4.2}$$

若连续函数组$x_1^{p_1},x_2^{p_2},\cdots,x_n^{p_n}$（$p_i\in N$）在紧集上是基本的，则存在自然数组$q_1,q_2,\cdots,q_n$（$\sum q_i=m$），使得

$$\int x_1^{q_1}x_2^{q_2},\cdots,x_n^{q_n}\mathrm{d}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\neq 0\tag{4.3}$$

对式(4.2)左边关于λ进行m次微分之后，施瓦兹得到，对$\lambda=0$，有

$$0=\sum_{p_1+p_2+\cdots+p_n=M}\left[\frac{m!}{p_1!p_2!\cdots p_n!}\frac{\partial^m V(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n)}{(\partial\varepsilon_1)^{p_1}(\partial\varepsilon_2)^{p_2}\cdots(\partial\varepsilon_n)^{p_n}}\times\right.\\\left.\int x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}\mathrm{d}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\right]$$

因此，对

$$a_{p_1,p_2,\cdots,p_n}=\frac{m!}{p_1!p_2!\cdots p_n!}\int x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n}\mathrm{d}\Phi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\tag{4.4}$$

根据式(4.3)可知它们不全为零，这样函数V是方程(4.1)的一个解。

再通过选择一族函数$\rho(u_1,u_2,\cdots,u_n)$，它们支撑在趋向于零的邻域上，并且均满足$\int\rho(u_1,u_2,\cdots,u_n)\,\mathrm{d}u_1\mathrm{d}u_2\cdots\mathrm{d}u_n=1$。施瓦兹发现与之对应的$V_S$在任意紧集上

一致收敛于U，因此U是带有系数(4.4)的偏微分方程(4.1)的一个广义解，这就证明了必要性。

通过上述定理的证明过程我们不难看出：广义解U可被看成卷积算子，它把支集为紧的无穷可导函数ρ映射成无穷可导函数V。正是这一点启发施瓦兹引入“卷积算子”这一新数学对象，并对它进行研究。施瓦兹先定义卷积算子是从支集为紧的无穷可导函数空间D到无穷可微函数空间ε的连续线性算子T，并且它具有性质$T\cdot(\varphi*\psi)=(T\cdot\varphi)*\psi$，其中$\varphi$和$\psi$为$D$中的任意元素。

算子T的线性性质很容易证明，这里主要考察它的连续性。首先，施瓦兹定义函数空间D中的收敛为：若其中的函数序列f_n的所有支集包含在一个固定紧集K中，并且f_n和它的各阶导数在K上一致收敛于f，则称函数序列f_n收敛于函数f。再者，施瓦兹让函数空间ε上的拓扑为通常的弗雷歇拓扑。由此，他把算子T的连续性定义为：若函数序列f_n在D中收敛于函数f，则$T\cdot f_n$在ε中收敛于$T\cdot f$。

这样，施瓦兹就引入了卷积算子的定义。随后他发现：由于函数g可由算子$f\to f*g$来定义，因而这是对R^n上连续函数的推广。他还发现利用卷积算子的定义可以严格地定义狄拉克函数，即$\delta\cdot\varphi=\varphi$。

据此我们容易知道，施瓦兹是在偏微分方程广义解工作的激发下引进卷积算子的，因而他自然而然地考察了卷积算子的导数。对此，他通过公式$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}T\right)\cdot\varphi=T\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$推广了公式$\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi*\psi=\varphi*\frac{\partial}{\partial x_i}\psi$。反之，他以一种直观方式定义了其原函数。

除导数定义之外，施瓦兹还定义了卷积算子的其他运算，如卷积和乘积。他定义两个算子S和T的卷积为$(S*T)\cdot\varphi=S\cdot(T\cdot\varphi)$。然而，当他发展算子与一个支集为紧的无穷可导函数的乘积时却遇到了困难。为了克服这一困难，他先证明了一个论断，即任意卷积算子在局部上是一个连续函数的n阶导数。然后他应用莱布尼茨公式按下述步骤相继地定义了乘积$f\cdot T$，其中f是支集为紧的无穷可导函数，T是一个卷积算子。

(1)若T在f的支撑K上是一个连续函数的导数g'，则他定义

$$f\cdot T=f\cdot g'\equiv(fg)'-f'g$$

显然，上式的右边可以被很好地定义。

(2) 若 $T = g''$，则他定义 $f \cdot T = f \cdot g'' = (fg)'' - 2f'g' - f''g$，由 (1) 可知该等式右边也有意义。

如此继续下去，施瓦兹能够对所有 K 上的 $T = g^{(n)}$ 定义乘积 $f \cdot T$。又由于他已经证明了任意卷积算子在局部上是一个连续函数的 n 阶导数，因而他可以按照这种方式对所有卷积算子定义乘积 $f \cdot T$。尽管施瓦兹的确通过这种方法定义了乘积 $f \cdot T$，但是显然这一方法略显繁杂。另外，他还给出了卷积算子的收敛定义。

卷积算子的这些工作是施瓦兹在 1944 年 10 月的一个晚上完成的，而且他在接下来的大约半年时间内仍然以卷积算子为研究对象，发展了一些定理。然而，大约在 1945 年 2 月的时候，当他开始发展卷积算子傅里叶变换时，遇到了无法克服的困难。虽然施瓦兹关于卷积算子乘法的定义具有复杂的缺点，但是终归还是可以利用这种思路成功定义乘积的。但对于傅里叶变换，难以处理的卷积算子使他毫无办法克服这里的困难。在与这一困难抗争数日之后，终于在 1945 年 4 月的某一天，施瓦兹在他办公室里突然意识到，倘若他定义的广义函数不是算子，而是一个泛函，那么他遇到的困难就能够被很好地克服。据此，施瓦兹反过来重新考察了他先前引入的广义函数概念。

4.2.2 分布概念的提出

1945 年 2 月，施瓦兹开始尝试定义卷积算子的傅里叶变换，这一工作激励他在同年 4 月的某一天意识到，可以用泛函取代卷积算子来对函数概念重新进行推广。当他产生这一想法时，他发现这一思想是多么自然。这使他认为自己之前非常愚钝，竟然在 1944 年 10 月的时候没有立刻发现这一概念的优越性。

虽然狄拉克函数并没有对施瓦兹的数学研究工作产生具体启示，但是它的严格化一直是施瓦兹想要解决的问题。这个问题一直存在于他的大脑之中，是他引进分布概念的一个激励因素。在其 1945 年文章的引言中，施瓦兹这样写道：

“自从符号运算法则被引进之后，物理学家就经常使用其中的某些概念或某些公式来研究物理学问题。尽管符号运算法则在数学上没有得到证实，但是物理学家运用这一工具所取得的成功是不可否认的。因此，以 x 为自变量的函数

$y(x)$ 的导数通常被看成‘狄拉克’函数。这里 $y(x)$ 是当 $x \leqslant 0$ 时取值为 0，当 $x>0$ 时值为 1 的函数。狄拉克函数在 $x \neq 0$ 时取值为 0，在 $x=0$ 时取值为 $+\infty$，并且 $\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(x)\mathrm{d}x=+1$。这种‘滥用语言’与通常函数的导数概念毫不相容！更有甚者，还要考虑狄拉克函数的各阶导数！然而，这些表达始终为电学研究提供着服务，并且适用于研究拉普拉斯方程、傅里叶变换和波动力学问题。这篇文章的目的在于给出随后将要出版的著作的简明梗概(没有证明)，在那部著作中将给出先前语言(指各种新定义、新名词)的所有证明。正是这一语言使分析学领域中的许多问题获得了解答：电学和数学物理，傅里叶变换和拉普拉斯变换，偏微分方程和偏微分不等式(调和函数理论和上调和函数理论)。到目前为止，我已经对许多公式进行了简化或给出了很好的解释。我认为在分析学领域中运用 y 的形式体系是有利的。”

显而易见，施瓦兹不仅一直关注着狄拉克函数的严格化问题，而且认为海维赛德函数的形式运算是分析学研究的有效工具。他在这篇文章第一部分的开始就指出，有必要去讨论比函数更为一般的数学对象，他发现狄拉克函数不是一个古典函数，而是一个测度或者质量分布，最简单的情形为它是位于原点、质量为+1 的测度。

事实上，施瓦兹在引入广义函数泛函定义之前已经知道测度，尤其是狄拉克测度能够被表示成泛函的形式。因此，他从测度定义入手，尝试着运用泛函思想重新对它进行定义。我们知道 R^n 上的复数值测度 μ 在施瓦兹之前被定义为关于集合的完全可加函数。也就是说，它将 R^n 的任意有界博雷尔集 A，特别是有界开集或闭集，与一个被称为该集合测度的复数 $\mu(A)$ 对应起来，并且具有完全可加性。完全可加性是指：倘若集合 A 是一个有界博雷尔集，并且它是可数的多个两两不相交的博雷尔集 A_i 的并，那么便有 $\mu(A)=\sum\limits_i \mu(A_i)$，式中右边的级数绝对收敛。

也就是说，测度能够把集合与数对应起来，这蕴含着泛函的思想。受此启发，施瓦兹把测度重新定义为在有限区间外取值为零的连续函数 $\varphi(x)$ 的泛函 $\mu(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}\mu$，式中右边的积分是斯蒂尔切斯积分。他指出该泛函不仅具有线性性质，而且在下述意义下连续，即若函数序列 φ_j 在某一固定有限区域外为零

且一致收敛于零，则$\mu(\varphi_j)$亦收敛于零。至此，他便得到了测度的泛函定义。利用测度的泛函定义，施瓦兹就能够给狄拉克测度一个严格解释。这是因为，若δ是位于原点、质量为+1 的狄拉克测度，那么就有$\delta(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}\delta=\varphi(0)$。

在此基础上，施瓦兹提出了这样的问题：一般函数是测度的什么特殊情形呢？对于这个问题，他论证可以将局部可积函数$f(x)$与密度为$f(x)$且满足$\mu(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)f(x)\mathrm{d}x$的测度$\mu$一一对应起来，从而论证了测度是古典函数概念的推广（见图 4.9）。

En quoi une fonction $f(x)$ est-elle un cas particulier d'une mesure ? En ce qu'elle définit une mesure de « densité » $f(x)$ pour laquelle la masse contenue dans un intervalle (a, b) est $\int_a^b f(x)\,dx$; plus généralement, la fonctionnelle définie dans la formule (1) s'écrit dans ce cas :

$$(2) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)\,dx$$

que nous appellerons $f(\varphi)$. Dans la suite nous identifierons une fonction $f(x)$ à la mesure qu'elle définit, et nous dirons fréquemment : la mesure μ se réduit à la fonction f, ce qui voudra dire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,d\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)f(x)\,dx,$$

$f(x)$ est alors n'importe quelle fonction sommable sur tout intervalle fini et elle est définie à un ensemble de mesure nulle près. Comme

图 4.9 施瓦兹把函数推广为测度

接着，施瓦兹指出有必要考察比质点更为复杂的概念——位势理论中的“多层”（双层或偶极子，以及更为复杂的层）。他先提出问题：位于原点、“矩”为+1 的双层是什么？

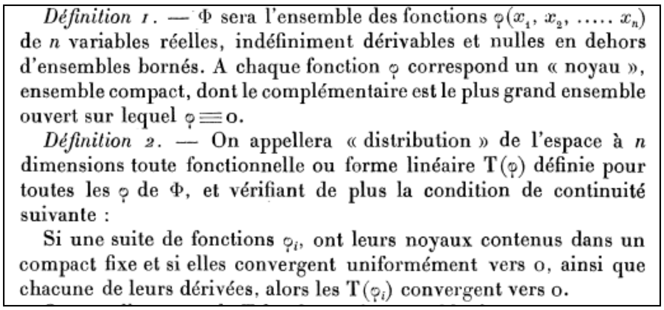
对于这一问题，施瓦兹解说道：它由位于ε点和原点、质量分别为$+\dfrac{1}{\varepsilon}$和$-\dfrac{1}{\varepsilon}$的质点构成，其中ε是无穷小量。再根据测度的线性泛函定义，则它可以表示为$T_\varepsilon(\varphi)=\dfrac{\varphi(\varepsilon)-\varphi(0)}{\varepsilon}$。倘若函数$\varphi$可导，那么当无穷小量$\varepsilon$趋向于零时，上式即为$T(\varphi)=\varphi'(0)$。

也就是说，偶极子可以被定义成关于可导函数φ的线性泛函T。显然，函数φ在这里必须具有一阶导数。然而，倘若函数φ在这里仅仅具有一阶导数，

那么将无法保证上述线性泛函连续。这是因为即便函数序列 φ_j 一致收敛于零，其导数序列 φ'_j 也未必就收敛于零。因此，必须对函数 φ 做进一步限定。正如施瓦兹强调说：

“为了绝对一般化，我们考虑让函数 φ 在区间外取值为零且无穷可导。”

这就促使他考虑让 φ 是在有限区域外取值为零，并且具有无穷阶导数的函数。因此，施瓦兹首先在他 1945 年这篇文章中定义了集合 Φ。它由所有无穷可导且在有界集外取值为零的 n 元实变量函数 $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 构成。每个函数 φ 对应一个紧“核”，它的余集是使函数 φ 在其上恒等于零的最大开集。显而易见，这里集合 Φ 中的元素就是我们现在所知的基本函数空间 D 中的元素，而“核”指的就是函数 φ 的支集。自然地，施瓦兹在上述概念的基础上定义了其上的连续线性泛函，这即为施瓦兹引进的广义函数概念，他称其为分布(见图 4.10)。


Définition 1. — Φ sera l'ensemble des fonctions $\varphi(x_1, x_2, \ldots.. x_n)$ de n variables réelles, indéfiniment dérivables et nulles en dehors d'ensembles bornés. A chaque fonction φ correspond un « noyau », ensemble compact, dont le complémentaire est le plus grand ensemble ouvert sur lequel $\varphi \equiv 0$.

Définition 2. — On appellera « distribution » de l'espace à n dimensions toute fonctionnelle ou forme linéaire $T(\varphi)$ définie pour toutes les φ de Φ, et vérifiant de plus la condition de continuité suivante :

Si une suite de fonctions φ_i, ont leurs noyaux contenus dans un compact fixe et si elles convergent uniformément vers 0, ainsi que chacune de leurs dérivées, alors les $T(\varphi_i)$ convergent vers 0.

图 4.10　施瓦兹定义的分布概念

施瓦兹在这篇文章中并没有论证为什么测度是分布的特殊情形。但在《分布理论》这一著作中，他详细论证了测度空间与分布空间的一个子空间之间存在着一一对应关系。也就是说，分布是测度的推广，而在任意紧集上可和的函数又是一个特殊测度，因而更是特殊的分布。由此，施瓦兹就把点映射到点的经典函数概念推广为作用在测试函数空间上的连续线性泛函。不同测试函数空间将产生不同的分布空间，最基本的测试函数空间由支集为紧的无穷可导函数构成，它产生最一般的分布。

通过上述分析不难看出，施瓦兹是在质点质量分布的启发下逐步引进他的广义函数概念的，这就解释了为什么他要将其引入的广义函数取名为“分布”。至此，施瓦兹就引进了他的广义函数概念——分布。

毫无疑问，分布概念的引入并不是一番顺利的。它的产生是一个曲折的过程，其间经历了卷积算子的过渡，而这恰恰见证了事物曲折的发展规律。分布概念引入的历程使施瓦兹得出这样的感悟：

“为了在数学上有所发现，我们必须克服已有抑制和传统。如果你不是一个颠覆分子，那么你将无法取得新进展。”

结合第 3 章的讨论，我们可知施瓦兹与索伯列夫引入广义函数概念的目的不同。索伯列夫的目的与兴趣在于研究双曲型偏微分方程，而施瓦兹的目的却在于推广古典函数概念。因而，索伯列夫引入了测试函数空间Φ_S、Ψ_S和Ω_S以及泛函空间Z_S、W_S和Y_S，施瓦兹引入的测试函数空间及泛函空间则是$D=C_{\text{comp}}^{\infty}$与$D'$。诚然，施瓦兹和索伯列夫引入了不同的测试函数空间以及泛函空间，但是他们引入的广义函数都是连续线性泛函。

4.2.3 分布概念的优越性

分布是古典函数概念的推广。与古典函数概念相比较，它具有许多优秀性质，尤其是无穷可导性。正是这些优秀性质破解了经典分析学中的一些局限性，彰显出分布概念提出的必然性和必要性。

上述分析告诉我们，施瓦兹是在考察偏微分方程广义解过程中萌发了推广古典函数概念的思想的，并引进了卷积算子，进而对卷积算子进行优化，得到了分布概念。因此，在分布概念基础上，他自然地考察了它的导数，指出不仅任意分布均无穷可导，而且可以交换求导次序。这一优秀性质不仅解释了为什么要引入分布概念，而且使施瓦兹利用它取得了一些重要结果。除此之外，关于分布的求导运算，他论证了一个非常重要的论断（见图 4.11）。

定理：分布的求导是一个连续线性运算；它甚至为严格的满同态。

> *Continuité de la dérivation* THÉORÈME XVIII *La dérivation des distributions est une opération linéaire continue ; c'est même un homomorphisme*

图 4.11 施瓦兹给出的求导的连续性定理

分布求导的连续性与其无穷可导性是分布概念最重要的两个优点，正是它

们恢复了经典分析学中的灵活性，使求导运算成为分析学的简单运算。他还给出了分布空间中最重要的收敛准则：若分布序列收敛于零，则其导数序列亦收敛于零。但在经典分析学中，函数序列一致收敛，其对应的导数序列却并非一定收敛。

其次，施瓦兹利用分布的导数定义严格地证明了海维赛德函数的导数的确是狄拉克函数。这是因为他定义分布的导数为 $\frac{\partial T}{\partial x_k}(\varphi)=-T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}\right)$，即 $T'_{x_k}(\varphi)=-T(\varphi'_{x_k})$。另一方面，如果把海维赛德函数作为分布来考虑，那么对支集为紧的无穷可导基本函数空间中的任意元素 φ，有 $Y(\varphi)=\int_0^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x$。因此，它的导数 Y' 为 $Y'(\varphi)=-Y(\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)=\delta(\varphi)$。从而有 $Y'=\delta$。据此，施瓦兹不仅解释了海维赛德函数的导数是狄拉克函数，而且揭示出该函数间断点能够产生的影响，即它以质点形式出现在该函数的导数中。

施瓦兹不但定义了分布的一阶导数，而且研究了它的高阶导数。他定义分布的 p 阶导数为：$D^pT(\varphi)=(-1)^{|p|}T(D^p\varphi)$。由此，他很容易地计算了海维赛德函数的二阶导数——狄拉克函数的一阶导数，即 $Y''(\varphi)=\delta'(\varphi)=-\delta(\varphi')=-\varphi'(0)$；以及它们的高阶导数：$\delta^{(p)}(\varphi)=(-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(0)$。

施瓦兹在《分布理论》中指出，狄拉克函数的一阶导数是位于原点、“矩”为-1 的偶极子，而狄拉克函数的高阶导数则是多极子。由此，他不但说明了为什么海维赛德符号运算法则中的许多公式及其运算是正确的，而且揭示出位势理论中“多层”的数学本质。

再者，借助狄拉克函数，施瓦兹首次提出了严格且统一的基本解概念。基本解是微分方程理论中的重要概念，数学家借助微分算子的基本解来研究微分方程解的性质。定义微分算子基本解统一概念的关键在于借助某一工具对不同微分算子在某点处的奇异类型进行统一刻画，狄拉克函数正好就是这一有效工具。然而，在施瓦兹引进分布概念之前，狄拉克函数是不被数学家所接受的奇异函数，这就很好地解释了为什么在施瓦兹之前基本解没有统一的概念。

在狄拉克函数严格化的基础上，施瓦兹完全抛弃了过去把微分算子的基本解定义为方程在一点处具有某种类型的奇异性的通常意义下的解，而是给出了下述明确、严格的基本解概念（见图 4.12）。

定义：若分布 $e_{(a)}$ 满足 $De_{(a)}=\delta_{(a)}$，其中 $\delta_{(a)}$ 表示位于 a 点、质量为+1 的狄拉克测度，则称分布 $e_{(a)}$ 是关于点 a 和微分算子 D 的基本解。

avis, être totalement rejetées. Nous appellerons solution élémentaire relative au point a de R^n et à l'opérateur différentiel D toute distribution $e_{(a)}$ vérifiant

(V, 6 ; 24) $\quad \mathrm{D}e_{(a)} = \delta_{(a)} = \text{masse} + 1 \text{ au point } a.$

Cela revient à dire que, si D′ est le transposé de l'opérateur D, et si $\varphi \in (\mathcal{D})$,

(V, 6 ; 25) $\quad e_a . \mathrm{D}'\varphi = \varphi(a).$

图 4.12 施瓦兹定义的微分算子的基本解

施瓦兹还考察了分布的局部结构，得到了极其重要的结果：任意分布在局部上是一个连续函数的导数。施瓦兹引入分布概念的一个重要原因是解决任意连续函数的求导问题，这一结论在没有引入任何新数学内容的情况下便使得任意连续函数变得无穷可导。

第 5 章　施瓦兹与广义函数理论

20 世纪 40 年代，广义函数理论产生的条件、时机已经成熟。这不仅是因为物理学和数学自身的发展为这一理论的建立提供了强大的动力，而且是由于创建广义函数理论的数学工具已经具备。不管有没有施瓦兹，这一理论都将在 20 世纪 50 年代左右被创建。只不过不同的数学家，因其所处的数学环境、所受数学传统的熏陶以及关注的焦点问题不同，他们创建的广义函数理论可能会有所不同。

基于索伯列夫留下的独立创作空间，受到来自布尔巴基学派及其奠基者相关工作的启发，想要求解卷积方程的驱动，使得施瓦兹在前人研究工作的基础上，在索伯列夫提出广义函数泛函定义的十年之后，再次独立地引入了广义函数的泛函定义，把傅里叶变换推广到这一数学对象上，建立了广义函数理论，成为广义函数理论的奠基者。1950—1951 年出版的两卷本《分布理论》也因此成为广义函数理论发展史上的里程碑。

5.1　施瓦兹与布尔巴基学派

布尔巴基学派是成立于 20 世纪前期的一个法国数学团体，它的主要数学成就在于出版了一系列《数学原理》专著，倡导了结构数学的观念。施瓦兹是布尔巴基学派的第二代成员，他早期的数学研究工作受到了布尔巴基学派的启发。

5.1.1　布尔巴基学派：法国的秘密数学团体

尼古拉 • 布尔巴基是法国一个年轻数学家团体进行写作的笔名，他们计划以此笔名出版涵盖绝大多数现代数学的广博之作。布尔巴基学派指的就是这一数学团体，它由一群年轻的法国数学家在 20 世纪 30 年代所创建。他们创建这一组织的初衷在于编写一部适合当时法国大学教学的微积分教材，而后逐渐演变为编写《数学原理》系列丛书的宏伟计划。

1931 年，嘉当(H. P. Cartan，1904—2008)到斯特拉斯堡大学执教，两年之后韦伊(见图 5.1)也来到这里工作。在斯特拉斯堡大学的执教过程中，嘉当和韦伊经常对教学方面的一些问题进行讨论。1934 年，嘉当多次与韦伊就如何更好地教授微积分学这门课程进行商讨，他对当时的微积分教材很不满意，尤其是多重积分部分。同嘉当一样，韦伊也不满意当时学校推荐的古尔萨(E. J. B. Goursat，1858—1939)的《分析教程》一书，他也希望以更好的方式引入微积分学中的各个概念。这致使韦伊提出了一个大胆想法，他向嘉当建议：

“下一次我们去巴黎的时候，我们和朋友们讨论一下重新编写新的分析学教科书的想法吧。”

图 5.1 韦伊(A. Weil，1906—1998)

当时，嘉当和韦伊定期到巴黎参加庞加莱研究所的数学研讨会。这不仅可以使他们有机会去那里的书店和图书馆，而且能够使他俩遇到以前巴黎高等师范学校的学生。午饭之后，他俩经常与朋友们在卢森堡花园附近的圣·米歇尔大道的卡普拉德咖啡馆聊天。就是在这家咖啡馆里，韦伊兴奋地向他的朋友们讲述他想重新编写分析学教材的计划，并希望支持他的朋友们能够加入这个计划当中。

韦伊的提议得到了朋友们的支持。1934 年 12 月 10 日，几位年轻的法国数学家在卡普拉德咖啡馆召开了他们的第一次工作会议。在这次会议上，他们对韦伊的想法进行了正式商讨，明确了重新编写一部适用于当时教学的分析学教科书的目标。他们确定了微积分学的教学大纲，计划用 25 年时间来集体撰写这部分析学专著，要求他们的分析学专著尽可能现代化，还计划著作成书之后由厄尔曼出版社出版。他们把这部专著的篇幅设定在 1000 页左右，计划在 6 个月内出版第一卷。

这一时期对他们来说，写作进度是件非常重要的事情。他们决定定期在卡普拉德咖啡馆见面，设立各自的目标。他们积极讨论所要涉及的内容以及这些内容应该出现的先后次序，并要求必须人人同意每项决定。为了完成这部著作，韦伊提议把整个委员会划分成许多小组委员会分头工作，这包括代数、解析函数、积分论、微分方程、微分方程存在定理、偏微分方程、微分形式、变分法、特殊函数、几何、傅里叶级数和函数表示小组委员会，不久之后还增加了拓扑小组委员会。

从 1934 年 12 月到 1935 年 5 月，这群年轻数学家以“分析学教程委员会”的称谓共召开了 10 次工作会议。在第二次会议中，委员会决定把他们的成员人数限制在 9 个人之内。他们是数学家嘉当、韦伊、谢瓦莱（C. Chevalley，1909—1984）、德尔萨特（J. F. Delsarte，1903—1968）、迪厄多内、德波塞尔（R. de Possel）以及迪布雷伊（P. Dubreil，1904—1994）、勒雷和芒德布罗伊（S. Mandelbrojt，1899—1983）。但迪布雷伊和勒雷不久之后便离开了这个组织，芒德布罗伊和德波塞尔在克莱蒙费朗大学的同事库仑（J. Coulomb）替代了迪布雷伊的位置，埃雷斯曼（C. Ehresmann，1905—1979）则替代了勒雷的位置。

1935 年 7 月 10 日到 17 日，这一组织在克莱蒙费朗召开了布尔巴基成立大会，会议决定采用尼古拉・布尔巴基这一笔名进行写作，这标志着布尔巴基学派的正式成立（见图 5.2）。在这次会议上，他们确定了布尔巴基学派的第一个完整工作计划。与此同时，他们的目标也从一开始的撰写分析学教程向编撰系列著作《数学原理》的宏伟计划转变，并决定每年召开三次工作会议。

古尔萨《分析教程》的缺陷激发了布尔巴基学派的诞生，致使“分析学教程委员会”的成立。然而，是什么原因激励这一组织后来把他们的目标更改为编写《数学原理》的宏伟计划呢？

图 5.2 布尔巴基学派 1935 年会议的参会人员［前排(从左到右)：米尔莱斯，谢瓦莱，芒德布罗伊；后排(从左到右)：嘉当，德波塞尔，迪厄多内，韦伊，大学实验室技术员］

布尔巴基学派工作计划的转变应归因于法国当时的历史环境。20 世纪初，法国数学处于其历史长河中的黄金时代。然而，第一次世界大战使法国的数学逐渐步入衰落，致使法国失去了一大批数学家。在卡普拉德咖啡馆，嘉当和韦伊就意识到法国数学界所面临的一个基本问题——数学家的断层。这是因为在第一次世界大战期间，法国的大学生都被迫到前线去作战，从而断送了一代法国数学家。

的确，法国在第一次世界大战期间损失了许多杰出的年轻数学工作者。许多教育机构有约四分之一的学生战死在战场上，巴黎高等师范学校数学系在第一次世界大战期间居然有近一半的学生战死。但在其他国家，如德国，数学家承担的是特殊的作战职责，他们利用自己的专业技能来增加军队的作战力，从而保护了一批数学工作者。因此，在 20 世纪 30 年代，法国年轻数学家由将要退休的老教授们来教授，那时的法国不仅缺失一代数学教授，而且损失了一批未来的数学家。迪厄多内对此有过这样的描述：

“……在战争中牺牲的那些年轻数学家本是可以沿着庞加莱和皮卡的研究道路继续前行的人。我们这一代吞下了这次持续了大约 15 年研究中断的恶果。我们的教授都比我们大 20 岁到 30 岁，教授我们的数学都是他们年轻时所学的

而不是新的理论。比较理想的情况是一个数学教授比他的学生年长不能超过 10 岁，最多不超过 15 岁，这样才能确保他教授的是属于这个时代的数学。不是自吹自擂，我可以说布尔巴基将法国从濒临灭亡中拯救出来。”

正是这一历史因素催生了布尔巴基学派的诞生，它把法国数学从濒危状态解救了出来，它的事业可以说是一项复兴法国数学的伟大行动。谈起布尔巴基学派，通常人们头脑中都会出现“神秘”和“疯子”等词汇，这一印象是由布尔巴基学派特有的工作风格所导致的。布尔巴基学派最明显的一个特征是：该学派之外的人不知道这个学派的成员都有哪些人，也不知道他们什么时候在哪里召开会议，更不知道他们的会议内容是什么。布尔巴基学派的成员都严格保守他们的秘密，这样做的好处在于保证了他们事业的集体性，也使其成员可以静心工作、免受外界干扰，同时还增加了他们的集体凝聚力以及专著的权威性。

布尔巴基学派的会议更是令人着迷。迪厄多内曾说，第一次参加他们会议的人常常有这样的感受：

“……人们总是表达出这样的印象——疯子的集会。他们无法想象这些大声喊叫——有时是三个或四个人同时——的人如何能够产生一些智慧。或许，这就是它的神秘之处，但最终一切都会平静下来。”

这种大声喊叫的行为由布尔巴基学派成员在会议期间“无法无天”的特性所导致，韦伊对此有这样的描述：

“在我们的讨论中，我们保持着谨慎的无组织特性。一个小组的会议中没有会议主席，任何人向大家讲其所想，并且每个人都有权力打断他……这一无组织的特征始终贯穿于布尔巴基学派之中……毫无疑问，一个好的组织应该是每个人都有一个课题或章节，但是这一做法从来没有在我们这里发生过……我们从这一经历中学到的具体东西是：这个组织中的所有努力最终都将以汇聚成著作的形式而展现出来。”

诚然，布尔巴基学派的会议是一个成员之间不论辈分、平等且自由发表言论的会议。各个成员都积极地参与到讨论中，最终大家对一个课题达成共识、形成著作，同时也达到了各个成员共同进步的目的。这种会议风格使得如果一个人想要成为布尔巴基学派的一员，那么他不但要能听懂大家的讨论，而且要

积极地投身到讨论之中，更重要的是能够经得起这种激烈讨论的考验。

与其他数学学派不同，布尔巴基学派的成员到 50 岁必须退休。他们之所以有这样的规定，首先是因为他们觉得有时参加会议的人数越多越不利于卓有成效的工作；其次是因为他们有着这样一个深入人心的信念，即一位数学家最优秀、最高效的时期是其年轻的时候。

布尔巴基学派的事业是伟大的，其成果和影响毋庸置疑。当代著名英国数学家、菲尔兹奖和阿贝尔奖获得者阿蒂亚（M. Atiyah，1929—）对此这样说道：

> “我这一代的、甚至随后几十年的数学家，没有人不知道尼古拉·布尔巴基的……我们中的很多人曾是布尔巴基的热情追随者，相信他们振兴了 20 世纪的数学，并指出其发展方向……他们共有的理想主义观点重新塑造了 20 世纪的数学。”

1940 年，布尔巴基学派出版了《数学原理》第一卷——《集合论的结果汇编》，它总结了集合论的结果，但没有证明。第二次世界大战期间又相继出版了三卷《数学原理》，继而在 1940—1970 年这 30 年间出版了很多分册。现在，布尔巴基学派共出版了 10 卷《数学原理》，它们分别是《集合论》（见图 5.3）《代数学》《拓扑学》《单实变量函数》《拓扑向量空间》《积分论》《交换代数学》《微分簇与解析簇》《李群与李代数》和《谱理论》。

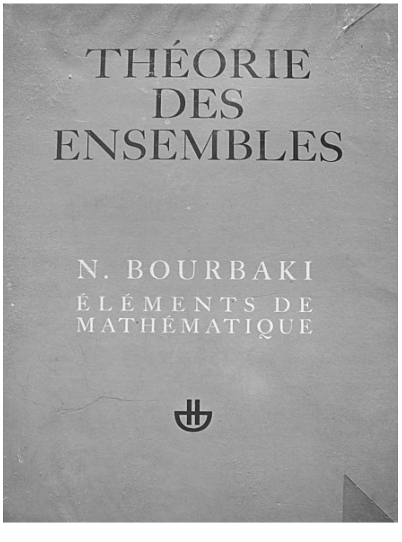


图 5.3 《数学原理》第一卷：《集合论》（1970 年版）

5.1.2　布尔巴基学派的数学观念

布尔巴基学派在以什么样的方法为基础、以什么样的思想为指导、以什么样的模式如何来呈现数学方面做出了明确决定。它的数学观点不仅对 20 世纪的数学具有决定性影响，而且在数学领域之外也有着深远影响。布尔巴基学派决定以公理化方法为基础来开展他们的数学事业，他们考虑把数学建立在数学的基础结构之上，继而通过极其一般的抽象对象来对整个数学进行梳理和统一。也就是说，公理化方法、结构数学思想以及数学的统一性是布尔巴基学派的数学观念。布尔巴基学派决定在他们整个研究工作中应用公理化方法，强调这是重新整理数学的必要条件，指出代数结构、序结构和拓扑结构是数学世界中心的基本结构。然而，布尔巴基学派的数学观点并不是它所独创的，它的数学观点有着一定的历史积累，它对已有思想进行了继承和创新，从而形成了数学的新统一。

布尔巴基学派的目的在于对整个数学世界进行统一，其实这一想法在数学的历史之中已经出现过多次，而布尔巴基学派的创新之处在于它认为数学学科是建筑在数学结构基础之上的统一大厦。也就是说，布尔巴基学派提出了数学结构的概念，并以数学结构思想为基础对数学科学进行了新统一，其定义结构的基础是集合。康托尔(G. Cantor，1845—1918)把集合定义如下：

“所谓集合是把我们直观或思维中确定的、相互间有明确区别的那些对象(它们称为集合的元素)作为一个整体来考虑的结果。”

在研究函数三角级数表达式的唯一性问题中，康托尔开始思考无穷点集问题。1874 年，他在《克莱尔》杂志上发表了题为“论所有实代数数集合的性质”的文章，这是康托尔关于集合论研究的第一篇文章，标志着他集合论研究的开端。随后他在 1874 年发表了集合论的第二篇文章，紧接着在 1879—1884 年间连续发表了六篇相关文章，建立了集合的相关理论。康托尔在 19 世纪末建立的集合论不仅是现代数学的基础，而且为布尔巴基学派的研究提供了必要的数学素材。在集合论的基础上，布尔巴基学派借鉴 20 世纪初德国现代抽象代数学派的抽象化、形式化以及公理化方法来定义数学结构。

20 世纪初，庞加莱(见图 5.4)和德国数学家希尔伯特(见图 5.5)主导了当时

的数学，他们被公认为是最后的两位全才数学家。庞加莱具有超强的几何天赋，但他的研究风格不受年轻人喜爱，因而他没有学生，常常独自进行研究。与庞加莱截然不同的是，希尔伯特的学术风格赢得了大家的赏识。他不仅教授了很多学生，而且常常激励他的同僚们与他共同进步。更重要的是，希尔伯特在哥廷根大学营造了极富激励性和友好的研究氛围，很多杰出的数学工作者都慕名到他那里进行学习，这使哥廷根大学成为当时世界数学的中心。

图 5.4　庞加莱(J. H. Poincaré，1854—1912)

图 5.5　希尔伯特(D. Hilbert，1862—1943)

德国现代抽象代数学派就是在那里诞生的，代表性人物是奥地利数学家阿廷(E. Artin，1898—1962)、德国女数学家诺特(A. E. Noether，1882—1935)以及她在哥廷根的一个学生——荷兰数学家范德瓦尔登(B. L. van der Waerden，1903—1996)。根据阿廷和导师诺特的讲义，范德瓦尔登在 1930—1931 年出版了名著《近世代数学》。正是这本著作激发布尔巴基学派成员产生了结构数学的思想，定义了数学的结构。

毫无疑问，第一次世界大战给法国数学界带来了一场巨大灾难。然而从某种角度上来讲，这次灾难促进了战后法国年轻人到世界各地进行访学，从而接触到他国的先进数学。20 世纪 20~30 年代，许多未来布尔巴基学派成员都到国外访学过，如年仅 19 岁的韦伊先后到意大利和德国进行了访学，迪厄

多内在美国普林斯顿大学学习过，芒德布罗伊到意大利和美国访学过，迪布雷伊到德国和意大利进行了学习，等等。就是这些访学经历使布尔巴基学派的几位创建者有幸接触到德国抽象代数学家，见到他们的代数学经典之作——《近世代数学》，进而了解到他们的思想和方法，从而为其日后开展布尔巴基事业奠定了思想和方法的基础。法国的马夏尔(M. Mashaal)这样评论《近世代数学》对布尔巴基学派产生的影响：

“在一定程度上，德国代数学家对布尔巴基学派的影响归功于《近世代数学》一书……《近世代数学》的成功立竿见影，它深刻影响着布尔巴基学派未来的成员们，这不仅在于它讨论的现代学科，还因为它在强调群、环、域等一般结构时简洁而严密的表述。正如迪厄多内 1968 年所说，‘范德瓦尔登的书以极其精确的语言进行论述，其思想和书各个部分的组织十分紧凑’。”

诚然，布尔巴基学派取得的成绩不仅在于其成员的出众才华，而且要归功于德国现代代数学家潜移默化的影响。早在 1935 年，布尔巴基学派就在它的成立大会上决定以公理化方法来处理材料。在公理基础上，布尔巴基学派指出集合上的结构就是给出集合中元素之间的一个或几个关系，而这些关系可以具有极其不同的特征。

布尔巴基学派认为数学中有三大类型的结构。在群结构中出现的关系是“合成律”，这是三个元素之间的关系，即第三个元素作为前两个元素的函数被唯一确定。如果一个结构中的关系是合成律，那么布尔巴基学派就称该结构为代数结构。另一重要结构是由次序关系所确定的结构，称为序结构。次序关系指的是两个元素之间的关系，即两个元素 x 和 y 中的一个作为另一个的函数被唯一确定(通常记为 xRy)，它满足下述公理：

(1) 对任意 x，有 xRx；

(2) 若有关系 xRy 和 yRx，则可以得出 $x=y$；

(3) 若有 xRy 和 yRz，则可以推出 xRz。

布尔巴基学派提出的第三大类型结构为邻域、极限和连续性等这些空间观念引出的直观概念提供了一个抽象的数学表达，即拓扑结构。布尔巴基学派认为这三大结构是整个数学世界的中心，称它们为母结构。在母结构基础上可以有多重结构，即同时包含两个或多个母结构，这些母结构通过一个或

几个公理有机地结合在一起，而不是简单地进行叠加。例如，拓扑代数就是一种多重结构，即在所考虑的拓扑之下，代数运算是它所运算的元素上的连续函数。

通过各个结构的定义不难发现它们的抽象性，这也是布尔巴基数学的一个重要特征。事实上，19 世纪代数学的发展就蕴含着数学的主流已经开始从应用和物理直观向抽象领域转变。那时，数学不但不怕引进抽象的数学对象，而且开始为研究而研究这些抽象对象。例如，法国数学家伽罗瓦(E. Galois，1811—1832)在研究代数方程时引入了群论和有限域，戴德金(J. W. R. Dedekind，1831—1916)提出了理想的抽象结构。

从一般到特殊是布尔巴基著作的另一显著特征。布尔巴基学派决定总是从最一般的情形推导出具体的情形，而不是对特殊情形进行推广，这一特征产生了非常强的逻辑性。然而，布尔巴基数学的这一特征具有一定的危险性，正如嘉当所言：

“当然，布尔巴基从一般到特殊的工作方式对那些一开始大脑中具体问题储备量有限的人来说有点儿危险。这是因为这可能会使他们产生这样的信念，即一般性是其所追求的目标。但是，这并不是布尔巴基的目的。对于布尔巴基而言，仅仅当一个一般性的概念不仅能够适用于很多特殊问题的解答，而且能够使我们在解答该问题时会省时省力的情况下才是有用的。这种省时省力性的要求在当今已经成为一种必要性。布尔巴基这种工作方式的目的在于希望未来数学家手中有一个使他们的工作变得更加容易，并且能够取得进一步进展的工具。”

作为一个集体，布尔巴基学派其实并没有引入过多少新数学，发表过多少新结果。除少数例外，它实际上是对已有数学知识的概括、重组和重述。布尔巴基学派的数学是一次具有深刻统一性的知识构建，而数学统一性既是布尔巴基数学的一大特征，又是它所追求的目标。1938 年，布尔巴基学派决定选用“数学原理”(éléments de mathématique)这一名称。应该注意到，这里他们选用的“mathématique”是单数而不是复数形式，这蕴含着布尔巴基追求数学统一性的信念。

5.1.3　布尔巴基学派对施瓦兹的影响

三年军事服役之后，施瓦兹再次燃起了对数学的激情。与布尔巴基学派的相遇，更促使他在数学上获得了飞跃。首先，施瓦兹之所以能够在两年之内完成优秀博士论文——“实指数和的研究”，是因为有布尔巴基学派创建者迪厄多内的启示与激励。其次，布尔巴基学派的会议不仅使施瓦兹学到了许多当时的新数学、新思想，而且使他习得了布尔巴基学派开展工作的思想和方法，这为他的分布理论工作奠定了思想基础。再者，布尔巴基学派引入的新数学词汇也对施瓦兹日后的数学研究具有一定帮助。

1940—1941 年，对施瓦兹和他妻子而言，他们的科学研究环境极其恶劣。幸运的是，在图卢兹的一次短暂停留改变了他们的境遇，这是因为他们遇到了布尔巴基学派的奠基者嘉当和德尔萨特。嘉当和德尔萨特告诉施瓦兹，德国的入侵使那时的斯特拉斯堡大学落入德国人手中，因而斯特拉斯堡大学数学系的许多教职员工都转移到德国中部的克莱蒙费朗大学，这其中就包含许多布尔巴基学派成员。嘉当和德尔萨特建议施瓦兹去克莱蒙费朗大学，在那里他能够在许多数学家，如迪厄多内、埃雷斯曼和芒德布罗伊的指引下进行研究。

移居到克莱蒙费朗是施瓦兹职业生涯的一个关键转折点。一方面，他在这里不仅遇到了许多布尔巴基学派成员，而且被引入到布尔巴基学派的数学方法之中。他的数学研究就以布尔巴基学派的测度理论为基础，并且仅考虑局部紧空间上的拉东测度。另一方面，施瓦兹从 1941 年开始创造有趣的数学——实或复指数和。迪厄多内对这一课题也颇具兴趣，他鼓励施瓦兹把它应用到他的论文之中，这使得施瓦兹完成了他的博士论文。

为了招募新成员，布尔巴基学派首先确定一个人是否有足够的能力，然后把他视为豚鼠[①]，邀请他参加他们的会议。如果他对布尔巴基学派有兴趣，并且布尔巴基学派的其他成员也对他有兴趣，那么他将被接纳为该学派的一名成员。嘉当对布尔巴基学派挑选成员的方式有这样的描述：

“布尔巴基挑选成员的方式是这样的，先请那些被认为有数学才华的候选人

① 之所以称其为豚鼠，是因为被考察的年轻人就像实验室里要接触到各种病毒的豚鼠一样，他们被邀请参加布尔巴基学派的会议，在会议过程中必须积极参与讨论、接受布尔巴基成员的各种提问和考验。

写一些文章。布尔巴基的成员不光是应该具备十分卓越的数学才华，而且他也应当具备非常优秀的品格、气质。因此，这些候选人要被请来宣读一下自己的作品，让讨论班其他成员检查批评，以了解他是否具备‘布尔巴基’性格。进行多次的接触后，才决定是否让他成为布尔巴基成员。”

施瓦兹就是不仅对布尔巴基有兴趣，而且得到该学派其他成员认可的一个人。1940—1942 年，他作为“豚鼠”被邀请参加布尔巴基学派的会议，随后成长为一名布尔巴基成员。1954 年，也就是施瓦兹的女儿克劳迪・施瓦兹（C. Schwartz, 1947—）七岁时，施瓦兹还带领他的家人一同去佩尔武，就像许多布尔巴基成员都把他们的家庭搬迁至此一样。

这一经历首先丰富了施瓦兹的数学知识，开阔了他的数学眼界，使他接触到许多之前在巴黎高等师范学校没有学到的新知识。他不仅接触到许多分析学中的新概念，而且学到了代数学、拓扑学和泛函分析这些新数学，从而为他后来的数学研究奠定了基础，提供了必要的数学工具。例如，在数学方面，施瓦兹就把他自己看作迪厄多内的学生。迪厄多内不仅在克莱蒙费朗时期就以布尔巴基学派的观点训练施瓦兹，而且在南锡时期对施瓦兹有很多影响，他教授了施瓦兹许多代数学知识。在南锡，施瓦兹还跟迪厄多内一起研究拓扑向量空间。

早在施瓦兹刚刚退伍之后，他就恢复了对数学的兴趣，回忆起他在巴黎高等师范学校学到的一切知识之后，他就对拓扑向量空间充满了兴趣。但是这一领域对他来说完全是一个新事物，这是因为他从来没有考虑过平面及我们所生活的三维空间之外的其他空间，他从来不敢考虑四维空间。但在那时，他遇到了完全一般化的拓扑向量空间，这是他从布尔巴基学到的第一个事物。再一次，他对此充满了热情。那时，迪厄多内正在大学讲授拓扑向量空间的课程，为了听迪厄多内的课，施瓦兹的妻子一周去克莱蒙费朗一两次，回来之后便把她学到的所有知识告诉施瓦兹。就这样，施瓦兹学到了拓扑向量空间理论的知识，并在两年之后把它们应用到了他的论文之中。

毋庸置疑，哈恩-巴拿赫定理、巴拿赫-斯坦因豪斯定理、贝尔定理、有界集和邻域、对偶、二次对偶和自反性等定理是施瓦兹发展分布理论的重要工具。虽然日后这些内容对施瓦兹来说相当简单，甚至是近乎平庸的，但是当时它们对施瓦兹来讲完全是新知识。施瓦兹吸收这些新知识没有任何困难，他还从图

书馆借阅相关书籍来帮助他的学习，尤其是德奇(G. Doetsch，1892—1977)的《拉普拉斯变换理论及应用》和斯坦因豪斯(H. D. Steinhaus，1887—1972)的《正交级数》。

诚然，拓扑向量空间和泛函分析这些具体数学知识是施瓦兹创建分布理论的基础。但更为重要的是，布尔巴基学派教会了他应用结构数学思想进行研究。如果我们对施瓦兹 1945 年的学术论文“函数、微商和傅里叶变换概念的推广及其在数学物理之中的应用”进行细致考察，那么便会发现他的确是在布尔巴基学派结构数学观念的基础之上创建分布理论的。

首先，为了解决数学物理及数学中广义微分及广义解问题，施瓦兹在引入分布概念之后自然地考察了分布的导数及其逆运算。据此，他证实了海维赛德函数的导数是狄拉克函数，并且任意分布均无穷可导的性质解答了古典微分学中函数的求导问题。然后，他便开始研究分布空间上的结构。他先定义了非负分布，也就是在分布空间上引入了序结构。接着，他考察了分布空间的三种代数结构，即分布的乘积、张量积和卷积。最后，他研究了分布空间的拓扑结构，证明了求导是一种连续线性运算和分布的局部性质。诚然，正是布尔巴基学派的结构数学思想使施瓦兹在引入分布概念及其导数之后便考察了分布这一数学对象的结构。施瓦兹曾说道：

“自从与布尔巴基学派相遇之后，每当我攻破任何数学问题之前，我都习惯性地先考察它们的结构……布尔巴基的书对应着不同的结构，这些结构可以赋予在数学对象之上。例如，其中有关于拓扑向量空间的书，有关于交换域的书。每个结构完全由它的公理所刻画。这一做法使我们有可能去分类所有的数学对象。再者，这消除了之前存在着的荒谬约束。我发现这非常令人满意!”

关于结构数学对分布理论的影响，我国数学史家胡作玄对此也有这样的描述：

“结构数学对于经典分析学也有重大影响，由于比较专门，这里只提比较重要的。

……

2 广义函数论。20 世纪 40 年代法国数学家施瓦兹在前人基础上系统地建立

了广义函数论，成为现代分析特别是偏微分方程论的基础。它的地位就相当牛顿、莱布尼茨在前人工作基础上系统地建立微积分一样。”

除了“结构数学”这一重大发明之外，布尔巴基学派还引入了丰富的数学词汇。数学词汇在数学中也有很大作用。一些数学对象，在赋予它们一个名称之前，必须通过它们所满足的一些很长的性质来刻画它们。例如，若 f 是集合 X 上的函数，它的值在集合 Y 中。我们常常会使用到下述数学对象：若 B 是集合 Y 的子集，则 A 是 $x \in X$ 且使得 $f(x) \in B$ 的集合。这一表达常常被反复使用，如若 X 和 Y 是两个拓扑空间，则函数 f 连续的充分必要条件是若 B 是集合 Y 的开子集，则按照上述方式定义的集合 A 也是开集。每一次，我们不得不反复地从 B 集合开始来定义 A 集合。

因此，引入映射 f 下的像集合是绝对必要的。若 B 是集合 Y 的子集，则点 $x \in X$ 且使得 $f(x) \in B$ 的集合 A 被称为函数 f 下 B 的原像，并记其为 $A = f^{-1}(B)$。现在则可以说，函数 f 连续的充分必要条件是：在映射 f 下，Y 的每一个开子集的原像是 X 的一个开集。直到 1932 年，像和原像不可避免的、显然的定义才由戴德金引入。当然，当戴德金引入像和原像的定义之后，布尔巴基学派立刻采用了它们。

毫无疑问，数学词汇使一切变得简单，而使用最精炼语言恰是布尔巴基学派所追求的。因此，布尔巴基学派在引入新术语上也倾注了许多精力。例如，他们引入了“双射”这个名词，这是两个集合之间的一种对应关系，即第一个集合之中的任意元素都能在第二个集合之中找到一个与之相对应的元素，反之第二个集合中的每个元素也能在第一个集合中找到与其对应的元素。

连续性是拓扑和分析中的基本概念之一，而严格、统一且一般化的连续定义依赖于严格的极限定义。为了得到一般的极限定义，布尔巴基学派引入了“滤子”(filtres)概念，它是嘉当在 1937 年 9 月发明的。

定义：设 E 是一个集合，F 为 E 的子集构成的非空集合，若满足以下三条公理：

(1) 空集不属于 F；

(2) 如果 A 是 F 的一个元素，并且 A 包含在 E 的一个子集 B 中，那么 B 也是 F 的一个元素；

(3) 如果 A 和 B 是 F 中的元素，那么它们的交 $A \cap B$ 也是 F 中的一个元素；则称 F 是 E 的一个滤子。

根据这一定义，我们很容易验证设 E 是一个拓扑空间，F 是给定点 x 邻域的集合，则点 x 邻域的集合是 E 上的一个滤子。这是因为首先空集不是 x 的一个邻域。其次，若 A 是 x 的一个邻域，则每个包含 A 的集合 B 都是 x 的邻域。再者，如果 A 和 B 是 x 的邻域，那么它们的交 $A \cap B$ 也是 x 的一个邻域。

定义滤子的意义在于，对用标准极限术语表述的定理，如数列的极限，当用滤子表述时，就可以在更弱的条件下使之成立。再者，通过滤子可以将某些拓扑性质从度量空间中推广到所有拓扑空间中。另外，在拓扑学以外的其他领域，滤子也是一个极其有用的概念，尤其是在数理逻辑方面。

在巴黎高等师范学校时，施瓦兹就在表述一定数量的命题时遇到了困难，那时他不得不一次又一次地给出所有定义。自从接触到布尔巴基学派的数学词汇及概念那一刻起，他的数学研究就获得了快速进展。这是因为一方面他从不同角度熟悉了布尔巴基学派引进的定义，快速地吸收了集合论、拓扑空间论以及群的相关定义。一旦看到那些定义，他便能够在两三个星期之内习得它们，使它们成为他研究的得力助手。例如，两个向量空间的张量积就为施瓦兹后来的分布理论工作提供了很大帮助，使他顺利定义了分布的卷积。

另一方面，布尔巴基学派的这个研究思路也对施瓦兹有着一定启示。他在发展一个理论时，起初会详细地表述某些即便是很长的性质。但是当他看到相同性质一次又一次地反复出现，并且不断地去重复它们使得人变得厌烦之时，他会返回去给这一性质取一个名字。例如，关于拓扑向量空间的积，他就针对双线性映射引入了“亚连续”概念。

值得注意的是，前面提到的布尔巴基学派的重要发明——滤子，也在施瓦兹分布理论中具有重要作用。正如他在《分布理论》的绪论中所言：

“……为了保证完全的正确性，我们必须在所有收敛性问题中使用嘉当的滤子。但是为了不加重正文的负担，我们采用比较‘朴素的’语言。

我们将会说：‘分布 T_j 收敛于零’，就好像所涉及的是一列序列 T_j（该序列依赖于整数参数 j 且当 $j \to \infty$ 时趋向于零），但大家应该将其理解为所讨论的是一个任意的收敛滤子。相反，某些定理仅对序列成立，此时我们则会说：‘若一

列分布列 T_j 收敛于零'。在许多实际的问题当中，序列(或至少是基有界或可数的滤子)就足够了，而针对一般滤子的定理要比针对序列的更难证明。因此，我们有时会对任意滤子来陈述定理的内容，但只满足于对序列给出证明。”

5.2 施瓦兹广义函数理论的基本内容

以拉东测度、卷积和拓扑向量空间的对偶理论为工具，以布尔巴基学派的结构数学思想为指导，施瓦兹于 1945 年在《格勒诺布尔大学学报》上发表了文章“函数、微商和傅里叶变换概念的推广及其在数学物理中的应用”(见图 5.6)。虽然这篇文章仅有 18 页，但是它包含了施瓦兹广义函数理论的大部分概念和思想。丹麦数学家玻尔(H. Bohr，1887—1951) 在 1950 年国际数学家大会上称赞施瓦兹这篇文章是他们那个时代中最优秀的数学论文之一，这很好地反映出这篇文章的价值和重要性。

1945 年这篇文章是施瓦兹《分布理论》一书(见图 5.7)的一个梗概，正如他在这篇文章的引言中指出：

“这篇文章是关于分布理论工作的一个简要总结，这里没有证明，随后我将出版一本分布理论的专题著作，在著作中将给出相应的详细论证。”

图 5.6 施瓦兹于 1945 年完成的文章

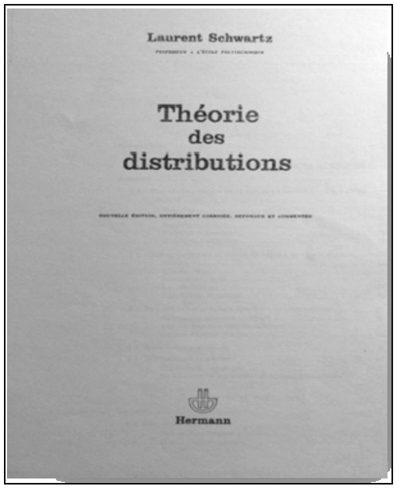


图 5.7 《分布理论》一书(1966 年版)。这一版在 1950—1951 年的两卷本《分布理论》基础上增加了“拉普拉斯变换”和“流形上的流”两章

这就决定了这篇文章在内容上的丰富性和篇幅上的简短性。除了引言之外，这篇文章的主体由五部分构成。在第一部分，施瓦兹给出了分布概念的形成过程，紧接着在第二、第三部分研究了分布的导数和积分，随后在第四和第五部分讨论了分布空间上的序结构、代数结构以及拓扑结构这三大基本结构。前面我们已经对分布概念产生的过程和原因做了详细论述，这里我们将把注意力放在分布导数、积分以及分布空间的结构上。

5.2.1　分布的导数与积分

分布是定义在性质很好的基本函数空间上的连续线性泛函，一般的局部可积函数就可以定义一个分布，即我们所称的函数型分布。因此，对于分布的导数，施瓦兹从函数型分布导数的定义出发，寻求定义任意分布导数的方法。

首先，若函数 $f(x)$ 是具有连续偏导数的连续函数，则它可以定义一个函数型分布，即 $f(\varphi)=\iint\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。由于函数 $f(x)$ 具有连续偏导数 f'_{x_i}，因而偏导数 f'_{x_i} 也可以定义一个分布，即 $f'_{x_i}(\varphi)=\iint\cdots\int f'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。又由于上述积分是在整个空间上进行的，并且函数 φ 在有界区域外为零，因而通过分部积分法便有 $f'_{x_i}(\varphi)=-\iint\cdots\int f\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)\varphi'_{x_i}(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mathrm{d}x_1\,\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$。上式可以简单地记为

$$f'_{x_i}(\varphi)=f(-\varphi'_{x_i}) \tag{5.1}$$

从式(5.1)不难看出，分布的偏导数可以通过基本函数空间中元素的相应偏导数来确定。据此，施瓦兹就把式(5.1)推广到了任意分布 T 的情形，即 $T'_{x_i}(\varphi)=T(-\varphi'_{x_i})$。也就是说，任意分布 T 的导数 T'_{x_i} 可由基本函数空间中元素的相应导数来计算，它是一个新分布。

在给出分布导数的定义(见图 5.8)之后，施瓦兹指出不仅任意分布是无穷可导的，而且可以改变求导次序。借助古典微积分学中的莱布尼茨记号，他记：

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}T}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2},\cdots,\partial x_n^{p_n}}(\varphi)=T\left((-1)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}\frac{\partial^{p_1+p_2+\cdots+p_n}\varphi}{\partial x_1^{p_1}\partial x_2^{p_2},\cdots,\partial x_n^{p_n}}\right)$$

因此，连续函数、甚至是有界区域上的可积函数就具有无穷可导性。值得

注意的是，通常情况下它们的导数既不是函数，也不是测度，而是一个分布。然而，若函数 f 在通常意义下可导，且其导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}$ 连续，则它的分布偏导数就是通常意义下函数的偏导数。

Soit f une fonction continue et dérivable à dérivées continues. Définie comme une distribution, elle satisfait à

$$f(\varphi)=\iint\cdots\int f(x_1, x_2, \ldots x_n)\,\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)\,dx_1, dx_2\ldots dx_n.$$

Sa dérivée f'_{x_i}, en tant que distribution, satisfait à

$$f'_{x_i}(\varphi)=\iint\cdots\int f'_{x_i}(x_1, \ldots x_n)\,\varphi(x_1, \ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n.$$

Cette intégrale est étendue à tout l'espace, mais φ est nul en dehors d'une région bornée ; il n'y a aucune difficulté à intégrer par parties :

$$f'_{x_i}(\varphi)=-\iint\cdots\int f(x_1\ldots x_n)\,\varphi'_{x_i}(x_1, \ldots x_n)\,dx_1\ldots dx_n$$

ou

$$(4)\qquad f'_{x_i}(\varphi)=f(-\varphi'_{x_i}).$$

Telle est l'égalité fondamentale vérifiée par une fonction continue et dérivable et sa dérivée f'_{x_i}, au sens usuel du mot. Cette égalité permet de généraliser la notion de dérivée et *de définir la dérivée* T'_{x_i} *d'une distribution quelconque* T comme une nouvelle distribution, entièrement connue comme fonctionnelle :

$$(5)\qquad T'_{x_i}(\varphi)=T(-\varphi'_{x_i}).$$

图 5.8 施瓦兹给出的分布导数定义

任意分布均可导且无穷可导是施瓦兹分布概念最基本、最重要的一个性质。这一性质完美地解答了函数的求导问题，使求导运算不再受限制。正是这一基本性质回答了施瓦兹为什么要引进分布概念这个问题。

随后，施瓦兹在这篇文章中给出了三个重要的求导例子。

例 1 海维赛德函数及狄拉克函数的各阶导数。对海维赛德函数

$$y(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ 1, & x>0\end{cases}$$

根据上述分布的导数定义，则有 $y'(\varphi)=-y(\varphi')=-\int_0^{+\infty}\varphi'(x)\mathrm{d}x=\varphi(0)=\delta(\varphi)$ 。

这就在数学上证实了海维赛德函数的导数的确是狄拉克函数。再者，施瓦兹通过上述例子指出了该导数的丰富含义。我们只知道在经典微积分学观念下，由于海维赛德函数在原点两侧的极限值不相等，因而它在原点处不连续。然而，上述例子使我们在质量为 1 且位于原点处的质量分布那里清楚地看到了这一不连续性。

另外，施瓦兹给出了海维赛德函数的二阶导数，它是狄拉克测度的一阶导数，即 $\delta'(\varphi)=-\delta(\varphi')=-\varphi'(0)$。更一般地，施瓦兹定义狄拉克函数的 n 阶导数为：$\delta^{(n)}(\varphi)=\ (-1)^n\varphi^{(n)}(0)$。

例 2　分段无穷可导函数的导数。设 $f(x)$ 为分段无穷可导函数。这意味着我们可以对实轴进行分割，在每个区间上，函数 $f(x)$ 无穷可导。因此，函数 $f(x)$ 及其各阶导数在区间端点处有第一类间断点。分布导数 f' 是通常意义下的导数 $[f']$ 与区间端点(间断点)处质点组的和，即 $f'=[f']+\sum\limits_{v} f_v\delta_{(x_v)}$，其中 x_v 为区间端点，$[f']$ 是在区间 (x_{v-1},x_v) 内等于函数 $f(x)$ 通常意义下导数的分布。在随后的《分布理论》著作中，施瓦兹给出了更一般、更高阶分段正则函数的导数，即 $f^{(p)}=[f^{(p)}]+\sum\limits_{v} f_v^{(p-1)}\delta_{(x_v)}+\sum\limits_{v} f_v^{(p-2)}\delta'_{(x_v)}+\cdots+\sum\limits_{v} f_v\delta_{(x_v)}^{(p-1)}$。

例 3　这是一个具有不同性质的例子。设函数 $f(x)$ 为

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0\\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}, & x>0\end{cases}$$

则该函数的导数不是一般的导函数。这是因为它在 $x=0$ 的邻域内不可积，因而不能定义分布。通过直接计算可得

$$f'(\varphi)=-f(\varphi')=-\int_0^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{\varphi'(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{2}x^{-\frac{3}{2}}\varphi(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\varphi(0)}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$$

也就是说，施瓦兹重新得到了阿达马在他 1932 年的著作《双曲型偏微分方程的柯西问题》中引进的发散积分的“有限部分”，并把它记为：

$f'(\varphi) = \ulcorner \int_0^{+\infty} \left(-\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}\right) \varphi(x)\, \mathrm{d}x$。从而设 f' 是伪函数，记为：$f' = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0 \\ -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}, & x > 0 \end{cases}$。施瓦兹还在这里指出：

“阿达马在其研究工作之中常常使用符号‘$\ulcorner$’。例如，他把在 $x \leqslant 0$ 时等于零、在 $x > 0$ 时等于 x^{α} 的函数的 $C_{\mathrm{comp}}(G)$ 阶导数表示为伪函数：$\ulcorner\, \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)x^{\alpha-k}$，$x > 0$。他还把函数 $\log|x|$ 的导数表示为伪函数 $\ulcorner \frac{1}{x} = v.p.\frac{1}{x}$，这里 $v.p.$ 表示柯西主值 $v.p.\frac{1}{x}(\varphi) = v.p.\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} \mathrm{d}x = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\int_{-\infty}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{+\infty}\right)$。”

在经典微积分学中，积分法是微分法的逆运算。求已知函数的导函数是微分学需要解决的基本问题，而求导函数的原函数则是积分学研究的主要内容。分布的导数是施瓦兹广义函数理论的重要内容之一，因而其逆运算同样是他关注的主要内容。在这篇文章中，施瓦兹首先给出了一个类似于经典积分学中原函数定理的定理。接着，他研究了已知一个偏导数的分布的原函数和已知两个偏导数的分布的原函数问题。施瓦兹还指出分布的原函数问题与偏微分方程求解问题之间有着密切关联，并且给出了三个偏微分方程解的例子。

首先，施瓦兹指出一阶导数为零的分布是常值函数，但在这里他并没有给出严格的证明，在随后的《分布理论》著作中对此进行了证明。然后，他考察了偏导数已知的多个变量分布的原函数，这里他以含有两个变量 x 和 y 的分布为例来说明问题。他考察了已知分布 T，求满足 $\frac{\partial S}{\partial x} = T$ 的分布 S；以及已知分布 A 和 B，求满足 $\frac{\partial S}{\partial x} = A$ 和 $\frac{\partial S}{\partial y} = B$ 的分布 S。但在这里施瓦兹并没有给出关于原函数 S 存在性的定理和证明，在《分布理论》中他论证了下述定理（见图 5.9）。

定理 1：若 S_1 是 R^n 上的一个已知分布，则关于分布 T 的方程 $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1$ 有无穷多个解，并且该方程的任意两个解之间仅相差一个“不依赖 x_1”的任意分布。

THÉORÈME IV　*Si S_1 est une distribution donnée sur R^n, l'équation, par rapport à la distribution inconnue T,*

(II, 5; 1)　$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1,$$

admet une infinité de solutions; deux d'entre elles diffèrent d'une distribution arbitraire, « indépendante de x_1 ».

图 5.9　施瓦兹给出的分布原函数定理

施瓦兹指出这里不依赖 x_1 的分布是指该分布在任何与 x_1 轴平行的 $h=(h_1,0,\cdots,0)$ 平移下保持不变。

定理 2：关于分布 T 的 k 个方程 $\dfrac{\partial T}{\partial x_1}=S_1$，$\dfrac{\partial T}{\partial x_2}=S_2$，⋯，$\dfrac{\partial T}{\partial x_k}=S_k$ 是相容的，当且仅当对任意 $i\leqslant k$ 和 $j\leqslant k$，均有 $\dfrac{\partial S_i}{\partial x_j}-\dfrac{\partial S_j}{\partial x_i}=0$；则该方程组有无穷多个解，并且任意两个解之间只相差一个不依赖 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 的任意分布 U(在平行于 $x_1,x_2,\cdots,x_k$ 所组成的向量子空间的平移下保持不变)。分布 U 的一般表达式为 $U(\varphi)=\sum\limits_k \lambda_k$，$\lambda_k=\underbrace{\int\cdots\int}_{k}\varphi\left(t_1,t_2,\cdots,t_k,x_{k+1},\cdots,x_n\right)\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_k$，其中 $\sum\limits_k$ 为变量 $x_{k+1},\cdots,x_n$ 的空间 R^{n-k} 上的任意分布。当 $k=n$ 时，不依赖任何变量的分布是一个常数 $U(\varphi)=\sum\limits_n(\lambda_n)=C\lambda_n=\iint\cdots\int C\varphi(t_1,t_2,\cdots,t_n)\,\mathrm{d}t_1\cdots\mathrm{d}t_n$。

这两个定理是对古典积分学中经典结果的推广，施瓦兹把它从关于函数的情形推广到关于分布的情形。在讨论了分布原函数问题之后，他指出了分布的原函数在偏微分方程 $\dfrac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}S}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}=0/T$ 求解中的应用(见图 5.10)。

他首先指出对于偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x\partial y}=0$ 的一般解 $S=A(x)+B(y)$，这里 A 是不依赖 y 的分布，B 是不依赖 x 的分布。然后，他指出双曲型偏微分方程 $\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}=0$ 的一般解 $S=A(x+y)+B(x-y)$ 中的 A 和 B 均为分布。他还指出拉普拉斯方程 $\Delta S=\dfrac{\partial^2 S}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 S}{\partial y^2}=0$ 的解是通常意义下的解。

Théorème VI (1) *Pour que le système de k équations en* T

(II, 6 ; 1) $\frac{\partial T}{\partial x_1} = S_1, \quad \frac{\partial T}{\partial x_2} = S_2, \quad \ldots, \quad \frac{\partial T}{\partial x_k} = S_k$

soit compatible, il faut et il suffit que quels que soient $i \leqslant k$ et $j \leqslant k$

(II, 6 ; 2) $$\frac{\partial S_i}{\partial x_j} - \frac{\partial S_j}{\partial x_i} = 0.$$

Il admet alors une infinité de solutions ; la différence entre 2 d'entre elles est une distribution arbitraire U *indépendante de* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *(invariante par translation parallèle au sous-espace vectoriel des* $x_1, x_2, \ldots, x_k$*) dont l'expression la plus générale est*

(II, 6 ; 3)
$$U(\varphi) = \Sigma_k(\lambda_k), \quad \lambda_k = \underbrace{\int \ldots \int}_{k} \varphi(t_1, t_2, \ldots, t_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)\, dt \ldots dt_k,$$

Σ_k *étant une distribution quelconque dans l'espace* R^{n-k} *des variables* $x_{k+1}, \ldots, x_n$.

Pour $k = n$, *une distribution indépendante de toutes les variables est une fonction constante*

(II, 6 ; 4) $U(\varphi) = \Sigma_n(\lambda_n) = C\lambda_n = \iint \ldots \int C\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)\, dt_1 \ldots dt_n.$

图 5.10　施瓦兹给出的已知多个偏导数的分布原函数定理

5.2.2　分布空间的代数结构

解决了分布导数与积分问题之后，施瓦兹便着手讨论分布空间上的结构。正如他在这篇文章第四部分的一开始强调的那样：

“我们可以研究分布空间中的许多有趣的性质和结构。”

首先，施瓦兹定义了大于等于零的非负分布T，即当$\varphi \geqslant 0$时，若$T(\varphi) \geqslant 0$，则称$T \geqslant 0$。他还给出了非负分布是非负测度的定理(见图 5.11)，这就为判断什么样的分布是测度提供了一个判别准则。这里需要指出的是，非负分布的定义其实是分布空间中的一种序结构。

1° On peut définir une structure d'ordre en définissant une distribution $\geqslant$ o :

$$T \geqslant 0 \quad \text{si, quelle que soit} \quad \varphi \geqslant 0, \quad T(\varphi) \geqslant 0.$$

Théorème. — *Toute distribution* $\geqslant$ o *est une mesure (ou distribution de masses)* $\geqslant$ o.

图 5.11　施瓦兹的非负分布定义及其定理

接着，施瓦兹研究了分布空间上的代数结构，即由“合成”法则关系所确定的结构。对分布空间的代数结构，施瓦兹主要考察了三种“积”，即分布的乘积、张量积和卷积。

对于乘积，施瓦兹定义分布 T 与无穷可导函数 α 的乘积 αT 为：$\alpha T(\varphi)=T(\alpha\varphi)$，指出乘积的导数满足 $(\alpha T)'=\alpha' T+\alpha T'$。他还举例说明 $x\delta'=-\delta$，这是因为 $(x\delta')(\varphi)=\delta'(x\varphi)=-(\varphi+x\varphi')_0=-\varphi(0)=-\delta(\varphi)$。

虽然我们知道任意两个分布之间不能进行乘积运算，但是在这里施瓦兹并没有指出这一点，因而也就没有解释为什么任意两个分布之间无法做乘法。再者，除了乘积的导数公式之外，他没有讨论分布乘积的其他性质。对于这些缺失，施瓦兹在他的《分布理论》著作中进行了详尽补充。

定义完分布与无穷可导函数的乘积之后，施瓦兹定义了两个分布之间的张量积。他以通常函数的张量积定义为切入点来寻求启示。由于函数 $f(x)$ 和函数 $g(y)$ 的张量积是一个含有两个变量的函数 $f(x)g(y)$，测度 $\mu(x)$ 和测度 $v(y)$ 的张量积是一个含有两个变量的测度 $\mu(x)v(y)$。又由于函数和测度都是特殊的分布，分布的实质是泛函。因此，施瓦兹先给出了测度张量积的泛函形式，即对任意函数 $\varphi(x,y)$，有 $(\mu_x\times v_y)\varphi(x,y)=\iint\varphi(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)\mathrm{d}v(y)$。

类似地，含有 m 个变量的分布 $S(x_1,x_2,\cdots,x_m)$ 和含有 n 个变量的分布 $T(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 的张量积是一个含有 $m+n$ 个变量 $x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的分布，施瓦兹把它记为 $S\times T$。为了得到 $S\times T$ 的值，就必须知道对于任意函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)$，$(S\times T)(\varphi)$ 的值。施瓦兹证明 $S\times T$ 可以完全由下式所确定，即若 $\varphi=A(x_1,x_2,\cdots,x_m)B(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，则 $(S\times T)(\varphi)=S(A)T(B)$。

另一方面，通过富比尼运算法则可知，两个分布的张量积可以由几个简单的逐次积分来计算。因此，$T_{y_1,y_2,\cdots,y_n}\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_m,y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是一个核为紧的无穷可导函数，因而施瓦兹得到两个分布的张量积公式

$$(S\times T)(\varphi)=S_{x_1,x_2,\cdots,x_m}(T_{y_1,y_2,\cdots,y_n}(\varphi))=T_{y_1,y_2,\cdots,y_n}(S_{x_1,x_2,\cdots,x_m}(\varphi))$$

定义分布张量积的一个重要目的在于定义分布的卷积，并且施瓦兹强调：

“但是，在整个分布理论中最重要的积是合成积(褶积)。”

这里施瓦兹所说的合成积或褶积就是我们现在熟知的卷积。起初，数学家

用“合成积”这一名称来表示卷积，后来发现这一表述比较模糊，因而在英语中用“卷积”替换“合成积”，在德语中用“褶积”取代“合成积”。现在来看施瓦兹是如何借助分布的张量积来成功定义分布卷积的。对于分布的合成积定义，他仍然以通常函数的卷积定义为突破口来寻求答案。

对两个单变量函数$f(x)$和$g(x)$，通常它们的合成积是由下式所确定的另一个函数$h(x)$：

$$h(x)=f(x)*g(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x-t)g(t)\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}g(x-t)f(t)\mathrm{d}t$$

另外，该合成积满足交换律和结合律：$f*g=g*f$ 和 $(f*g)*h=f*(g*h)$。

在上述函数合成积定义中，仅仅当函数$f(x)$和$g(x)$在无穷远处速降时$h(x)$才存在。这启发施瓦兹得到这样的论断：对于任意分布，在假设合成积的因子最多除了一个之外，其余因子的核全是紧的情况下，该合成积均有意义。这正是分布合成积存在的条件。现在的问题就归结为如何来定义满足这一存在性条件的分布的合成积。对于这个问题，施瓦兹注意到若函数$f(x)$，$g(x)$和$h(x)$是连续函数，则可以把它们看成分布而引入函数合成积的泛函定义，即

$$h(\varphi)=\int_{-\infty}^{+\infty}h(x)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\iint f(u)g(v)\varphi(u+v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

也就是说，对于两个变量的函数$\varphi(u+v)$，$h(\varphi)$是张量积$f(u)\times g(v)$的线性泛函。

受此启发，施瓦兹得到了分布的合成积定义。若$S(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和$T(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是同一n维空间中的两个分布且至少有一个具有紧核，则施瓦兹称合成积$S*T$是该n维空间中的另一新分布，它是一个线性泛函。对于函数$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，该分布的值为张量积$S_{u_1,u_2,\cdots,u_n}\times T_{v_1,v_2,\cdots,v_n}$关于$2n$个变量的函数$\varphi(u_1+v_1,u_2+v_2,\cdots,u_n+v_n)$的值，记其为

$$(S*T)_{x_1,x_2,\cdots,x_n}(\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n))=(S_{u_1,u_2,\cdots,u_n}\times T_{v_1,v_2,\cdots,v_n})[\varphi(u_1+v_1,\cdots,u_n+v_n)]$$

再根据富比尼定理，施瓦兹用两个逐次“积分”

$$S_{u_1,u_2,\cdots,u_n}[T_{v_1,v_2,\cdots,v_n}\{\varphi(u_1+v_1,\cdots,u_n+v_n)\}]=T_{v_1,v_2,\cdots,v_n}[S_{u_1,u_2,\cdots,u_n}\{\varphi(u_1+v_1,\cdots,u_n+v_n)\}]$$

来计算分布的合成积（见图 5.12）。

Plus généralement, si $S(x_1, x_2 \dots x_n)$, $T(x_1, x_2 \dots x_n)$ sont deux distributions sur le même espace à n dimensions (l'une au moins étant à noyau compact, pour éviter toute difficulté à l'infini) nous appelerons produit de composition $S * T$ une nouvelle distribution dans le même espace à n dimensions, définie comme une fonctionnelle linéaire, prenant pour la fonction $\varphi(x_1, x_2 \dots x_n)$, la valeur que prend le produit tensoriel $S_{u_1, u_2, \dots u_n} \times T_{v_1, v_2, \dots v_n}$ pour la fonction de $2n$ variables $\varphi(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots u_n + v_n)$. Nous écrirons :

$$(S * T)_{x_1, x_2 \dots x_n}(\varphi(x_1, x_2, \dots x_n)) = (S_{u_1, u_2, \dots u_n} \times T_{v_1, v_2, \dots v_n})[\varphi(u_1 + v_1, \dots u_n + v_n)],$$

que l'on peut remplacer, d'après Fubini, par :

$$S_{u_1, u_2, \dots u_n}\left[T_{v_1, v_2, \dots v_n}\{\varphi(u_1 + v_1, \dots u_n + v_n)\}\right] = T_{v_1, v_2, \dots v_n}\left[S_{u_1, u_2, \dots u_n}\{\varphi(u_1 + v_1, \dots u_n + v_n)\}\right].$$

图 5.12　施瓦兹的分布卷积定理

随后，施瓦兹在这篇文章中探讨了分布合成积的几个重要性质。其一，狄拉克函数是合成积代数的单位元，即 $\delta * T = T$ 。这很容易被验证，因为

$$\begin{aligned}(\delta * T)_{x_1, x_2, \cdots, x_n}\left[\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)\right] &= T_{v_1, v_2, \cdots, v_n}[\delta_{u_1, u_2, \cdots, u_n}\varphi(u_1 + v_1, u_2 + v_2, \cdots, u_n + v_n)] \\ &= T_{v_1, v_2, \cdots, v_n}[\varphi(0 + v_1, \cdots, 0 + v_n)] = T(\varphi)\end{aligned}$$

所以狄拉克函数是合成积的单位算子。

通过狄拉克函数是合成积的单位元这一基本性质，施瓦兹得到了另一重要性质，即求导是一种合成积运算，用公式可以表示为：$\dfrac{\partial \delta}{\partial x_i} * T = \dfrac{\partial T}{\partial x_i}$ 。这样有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \delta}{\partial x_i} * T\right)_{x_1, \cdots, x_n}[\varphi(x_1, \cdots, x_n)] &= T_{v_1, \cdots, v_n}\left[\left(\frac{\partial \delta}{\partial u_i}\right)_{u_1, \cdots, u_n}\varphi(u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)\right] \\ &= T_{v_1, \cdots, v_n}\left[-\left\{\frac{\partial \varphi}{\partial u_i}(u_1 + v_1, \cdots, u_n + v_n)\right\}_{u_1 = \cdots u_n = 0}\right] \\ &= T_{v_1, \cdots, v_n}\left[-\frac{\partial \varphi}{\partial v_i}(v_1, \cdots, v_n)\right] \\ &= \left(\frac{\partial T}{\partial x_i}\right)_{x_1, \cdots, x_n}\{\varphi(x_1, \cdots, x_n)\}\end{aligned}$$

因此，求导算子是简单的合成积运算。为了简便起见，用$\dfrac{\partial}{\partial x_i}$代替$\dfrac{\partial}{\partial x_i}\delta$，则有$\dfrac{\partial T}{\partial x_i}=\dfrac{\partial}{\partial x_i}*T$。再者，施瓦兹导出了下列公式：

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}*\left(S*T\right)=\left(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}*S\right)*T=\left(\frac{\partial}{\partial x}*S\right)*\left(\frac{\partial}{\partial y}*T\right)$$

诚然，这一公式告诉我们求导可以对其中一个因子进行。以上三条性质是合成积最基本、最重要的性质，它们使分布的合成积能够在偏微分方程和积分方程的研究中扮演着重要角色。

为了说明合成积基本性质的价值，施瓦兹在这篇文章中列举了一个极富代表性的例子：关于位势的泊松公式和关于上调和函数的里斯分解。

在三维空间中，函数$\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$是上调和函数。若函数连续且二次可微，则$T$为上调和函数等价于不等式$\Delta T\leqslant 0$。因而有$\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)\leqslant 0$，它是一个负测度。若在原点之外$\Delta\left(\dfrac{1}{r}\right)=0$，则该测度集中在原点，因而它是位于原点、质量为$-k$的测度。我们可以证得$k=+4\pi$，且$\Delta*\left(\dfrac{1}{r}\right)=-4\pi\delta$。在这个公式之中，$\Delta$表示拉普拉斯算子，这意味着$\Delta\delta$是一个分布。根据$\Delta*\left(\dfrac{1}{r}\right)=-4\pi\delta$易知$-\dfrac{\Delta}{4\pi}$和$\dfrac{1}{r}$的合成积为狄拉克函数，因而它们互逆。

设T是任意一个具有紧核的分布，则当T是函数$\rho(x,y,z)$时，可由下式得到电势分布：

$$U_\rho(x,y,z)=\iiint\frac{\rho(\xi,\eta,\zeta)}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta$$

或

$$U_\rho=\frac{1}{r}*\rho$$

若T是任意核为紧的分布，则仍然可以得到上述公式，即$U_T=\frac{1}{r}*T$。由此立刻可得

$$\Delta*U_T=\Delta*\left(\frac{1}{r}*T\right)=\left(\Delta*\frac{1}{r}\right)*T=-4\pi\delta*T=-4\pi T \tag{5.2}$$

这就是经典的势能泊松公式。然而在这里，它不仅适于连续单层的势能，而且适于任意层的势能。

现在考察对应于上调和函数S的分布。$\Delta S\leqslant 0$是小于等于零的测度，我们称它为$-4\pi\mu$，其中μ是大于等于零的测度，即$\Delta S=-4\pi\mu$。若U_μ是μ的位势，则由式(5.2)可得$\Delta U_\mu=-4\pi\mu$，因而有$\Delta(S-U_\mu)=0$。再者，由于$\Delta S=0$的解为通常意义下的解，因而$S-U_\mu$几乎处处、甚至是每处为通常意义下的调和函数H，继而这两个上调和函数几乎处处、甚至每处相等：

$$S=U_\mu+H,\quad \mu\geqslant 0$$

这个公式就是所谓的里斯分解，即任意一个上调和函数是大于等于零的测度的位势与一个调和函数之和。纵观上述论证过程不难发现，在合成积性质的帮助下，泊松位势和里斯分解的论证变成了简单的几行代数运算，从而非常容易地就得到了泊松位势和里斯分解公式，这即为合成积的优良属性及其在处理问题时重要性的见证。

除了上述三个基本性质之外，合成积还有一些重要属性。对此，施瓦兹在他的《分布理论》中做出了详细讨论，而且还在该著作中给出了更多合成积的应用，如在分布正则化、偏微分方程求解以及积分方程研究中的应用。

5.2.3　分布空间的拓扑结构

拓扑结构是指邻域、极限和连续性这些空间直观概念的一种抽象数学表述。表述这种结构的公理，其抽象程度要比序结构和代数结构高得多。作为一种基础结构，施瓦兹也探讨了分布空间中的这一结构。这既是施瓦兹这篇文章的最后一个重要内容，也是他分布理论的重要组成部分。在这部分的一开始，施瓦兹说道：

“在分布空间中引入拓扑是一件有趣的事情，这是为了说明分布序列T_i收敛于极限分布T，也就是说T_i-T收敛于零。”

从这句话不难看出分布空间上的拓扑结构在分布理论中的重要性。施瓦兹在分布空间上引入了他认为最有趣的拓扑：

“若对任意的函数φ（这里函数φ指的是前面我们提到的核为紧的无穷可导函数空间中的元素），$T_i(\varphi)$收敛于零，并且在由核包含于一个固定紧集中的函数φ构成的任意有界集上一致收敛于零，则称分布序列T_i收敛于零。”

通常函数$y=f(x)$的导数是该函数的增量Δy与其自变量增量Δx的比$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$的极限。也就是说，在函数的导数定义中需要考察函数的收敛性。类似地，在定义了分布序列的收敛概念之后，施瓦兹给出了与通常函数导数定义相一致的分布导数定义。在给出分布导数的极限定义之前，施瓦兹先指出：

“从表面上来看，分布的收敛定义很复杂。但是通常情况下，验证分布序列是否收敛还是比较容易的。因此，我们可以立刻定义与通常函数导数定义相一致的分布的导数。”

一方面，这句话表明引入分布导数的变化率定义的可行性；另一方面，这句话也体现出分布空间拓扑结构的重要性。施瓦兹将分布导数的变化率定义为

$$T'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{T(x+h)-T(x)}{h}$$

且对任意分布T，有泰勒展开式

$$T(x+h)=T(x)+hT'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}T^{(n)}(x)+h^n\varepsilon(x)$$

其中ε为关于h趋向于零的分布（见图 5.13）。

Cet énoncé n'est compliqué qu'en apparence, l'examen de la convergence est en général facile. Ainsi on voit immédiatement que la dérivée d'une distribution peut être définie comme la dérivée d'une fonction usuelle :

$$\mathrm{T}'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathrm{T}(x+h)-\mathrm{T}(x)}{h}, \tag{26}$$

et que le développement limité de Taylor est valable pour toutes les distributions :

$$\mathrm{T}(x+h)=\mathrm{T}(x)+h\mathrm{T}'(x)+\cdots+\frac{h^n}{n!}\mathrm{T}^{(n)}(x)+h^n\varepsilon(x), \tag{27}$$

ε étant une distribution qui tend vers o avec h.

图 5.13　施瓦兹给出的分布导数的拓扑定义

随后，施瓦兹给出了两个在实际应用中最为方便的收敛准则(见图 5.14)：

定理 1：若连续函数序列 f_i 收敛于连续函数 f ，且在每个紧集上一致收敛，则分布序列 f_i 收敛于分布 f 。

定理 2：求导是连续线性运算。也就是说，若分布序列 T_i 收敛于 T ，则 DT_i 收敛于 DT ，其中 D 为任意求导符号。

Théorème 1. — *Si des fonctions continues f_i convergent vers une fonction continue f, uniformément sur tout compact, les distributions f_i convergent vers la distribution f.*

Théorème 2. — *La dérivation est une opération linéaire continue. Autrement dit si des distributions T_i convergent vers T, les DT_i convergent vers DT, D étant un symbole de dérivation quelconque.*

图 5.14　施瓦兹给出的两个收敛准则

诚然，定理 2 解决了所有关于微分的困难。由此便可以在没有采取任何预防措施的前提下，对收敛序列、级数或积分逐项求导或在积分号下进行求导。另外，在经典微分学意义下，可微函数序列 f_i 一致收敛于零不能保证其导数序列 f_i' 的极限存在，但在分布的拓扑空间中有 f_i' 收敛于零。据此，施瓦兹立刻得到偏微分方程的解是闭集的论断，也就是说，偏微分方程解的极限仍然是其解。

利用分布空间的拓扑结构，施瓦兹还讨论了分布的局部结构，得到了重要结果：

“在任意有界区域上，任意一个分布是一个连续函数的导数。基本上，我们引入的这些分布使所有连续函数可导；但是我们仅仅在引入了最不可能成为新数学元素的东西的情况下就使得任意连续函数变得无穷可导。”

这个结论的重要性毋庸置疑，这是因为引入分布这一新数学对象就是为了解决函数的求导问题，而施瓦兹在没有引入任何多余东西的情况下就成功地解答了这一问题。

施瓦兹还在这里讨论了分布的正则化，指出核为紧的无穷可导函数空间在分布空间中稠密。也就是说，任意一个分布都是核为紧的无穷可导函数的极限。借助分布的卷积运算，对任意给定的分布，施瓦兹找到了用一系列无穷可导函数来逼近该分布的正则化方法。

这是因为若无穷远处的正则性条件保证分布T与无穷可导函数α的卷积存在，即分布T与无穷可导函数α至少有一个的核为紧集，则该卷积为通常意义下的无穷可导函数，称它为分布T关于α的正则化，即$T*\alpha$。因此，对任意分布T，若ρ_i为一系列无穷可导函数，则当ρ_i趋向于δ时便有$T*\rho_i$趋向于$T*\delta=T$，即$T*\rho_i$趋向于分布T，而这里的$T*\rho_i$为一列无穷可导函数。

最后，施瓦兹在这篇文章中讨论了傅里叶级数和傅里叶积分的收敛性问题。首先他给出了一个定理，即对任意实数α，当$t\to\pm\infty$时，函数$t^{\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$收敛于零。类似地，施瓦兹指出对任意实数$\alpha>0$，若$\left|a_n\right|=O(|n|^{\alpha})$，则傅里叶级数$\sum a_n\mathrm{e}^{inx}$收敛。再者，施瓦兹得出这样的结论：任意周期分布有一个收敛到该分布的傅里叶级数；任意系数缓增的三角级数收敛于一个周期分布，且该周期分布的傅里叶级数等于该三角级数。也就是说，我们无须区分傅里叶级数与不是傅里叶级数的三角函数。他在《分布理论》中详细论证了这一结果，在那里它作为一个重要定理而出现。在著作中，他还对该定理有这样的评注：

“该定理消除了傅里叶级数与不是傅里叶级数的三角函数之间那个惯有的、令人难以忍受的区别；它使得那些让傅里叶级数收敛的‘求和法’变得无用。”

对于傅里叶积分，施瓦兹得到了类似结果。他指出若$x\to\pm\infty\left|f(x)\right|=O(|x|^{\alpha})$ $(\alpha>0)$，则傅里叶积分$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\mathrm{d}x$收敛。

5.3 卷积方程的激励

卷积是施瓦兹分布理论的重要组成部分，卷积方程的求解是施瓦兹所要考察的重要内容。卷积方程包含许多微分、积分方程以及微分-积分混合方程，寻求它的一般求解策略具有重大意义和价值。那么，施瓦兹在什么思想的激发下，借助什么数学工具，如何求解卷积方程的？它的求解对施瓦兹发展分布理论有什么启发？

5.3.1 卷积方程的求解策略

在施瓦兹发展分布理论之前，许多数学家都对函数的卷积运算进行过研究，

卷积出现在分析学领域的许多文献之中。例如，海维赛德在 1893—1894 年发展的符号运算法则中就引入了卷积的符号运算。

施瓦兹在引入分布概念之后考察了分布空间的三个基本结构，卷积运算理所当然地成为他关注的核心代数结构。他在 1945 年的文章中强调卷积是整个分布理论中最重要的积，在《分布理论》中仍然强调这一点：

“卷积在越来越多的分析学领域扮演着越来越重要的角色，这些领域包括概率计算，符号计算，群论，傅里叶积分与级数，位势理论和积分方程。”

从函数的卷积运算入手，施瓦兹探究了分布卷积的存在条件及其计算。在此基础上，他不仅探讨了分布卷积的众多优秀性质，如求导是一种卷积运算、对卷积进行求导只需对其中一个因子进行求导等；而且考察了它的主要应用，如在一个或一族分布正则化研究中的应用、在积分研究中的应用以及在偏微分方程和积分方程中的应用。

分布卷积的性质使卷积方程能够涵盖许多分析学领域中的重要方程。因此，如果能够找到一个处理卷积方程的一般思路，那么显然就可以解答许多方程的求解问题，至少会提供一种有效的求解思路。诚然，施瓦兹已经意识到这一点，正如他在《分布理论》中所述：

“卷积方程①包含大量重要的特殊方程：

(1) 若 $A=D=\sum_{|p|\leqslant m} a_p D^p \delta$ 是多项式求导算子，则卷积方程便是最一般的常系数偏微分方程：$D*T=\sum_{|p|\leqslant m} a_p D^p T=B$。因此，这些方程一方面是变系数偏微分方程的特殊形式，而另一方面则是卷积方程的特殊形式。

(2) 若 $A=\sum_{v} a_v \delta_{(h_v)}$ 是离散质点的有限线性组合，则卷积方程就是最一般的常系数有限差分方程：$A*T=\sum_{v} a_v \tau_{h_v} T=B$。

(3) 若 A 是一个函数 $K(x)$（相应地，是 δ 与函数 $K(x)$ 之和），T 是函数 $f(x)$，B 是函数 $g(x)$，则卷积方程便成为第一类（相应地，第二类）边界固定的积分方程：

① 指 $A*T=B$，其中系数 A 与常数项 B 是已知分布，T 是未知分布。

$$\begin{cases} A = K(x) \\ A * f = \iint \cdots \int K(x-t) f(t) \mathrm{d}t = g(x) \end{cases}$$

相应地，有

$$\begin{cases} A = \delta + K(x) \\ A * f = f(x) + \iint \cdots \int K(x-t) f(t) \mathrm{d}t = g(x) \end{cases}$$

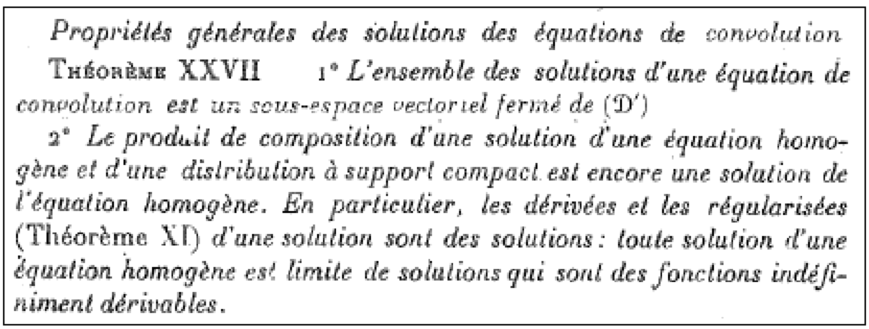
若在这些条件下 A 与 B 都关于圆锥 Γ 左有界，并且寻找支集亦左有界的解 $T = f$，则卷积方程就为沃尔特拉型积分方程。

倘若将这些不同类型的方程组合起来，那么便可得到多种类型的积分-微分方程。”

毫无疑问，施瓦兹想要探究卷积方程的求解方法。的确，他不仅考察了卷积方程解的情况，而且得到了卷积方程的一般求解思路。对于方程的解，他得到了下述定理(见图 5.15)：

“(1)任意卷积方程的解集是 (D') 的闭向量子空间。

(2)齐次方程的任意解与支集为紧的分布的卷积仍是齐次方程的解。特别地，齐次方程任意解的各阶导数与正则化亦为齐次方程的解：齐次方程任意解是该方程无穷可导函数解的极限。”



Propriétés générales des solutions des équations de convolution

THÉORÈME XXVII 1° *L'ensemble des solutions d'une équation de convolution est un sous-espace vectoriel fermé de* $(\mathcal{D}')$

2° *Le produit de composition d'une solution d'une équation homogène et d'une distribution à support compact est encore une solution de l'équation homogène. En particulier, les dérivées et les régularisées* (Théorème XI) *d'une solution sont des solutions : toute solution d'une équation homogène est limite de solutions qui sont des fonctions indéfiniment dérivables.*

图 5.15 施瓦兹得到的卷积方程解的一般性质

对卷积方程的求解，施瓦兹首先提出了基本解方法，这是微分方程求解中的重要方法。通过前面论述我们已经知道，施瓦兹在利用分布概念阐明了狄拉克函数之后便明确定义了微分算子的基本解。受此启发，他定义卷积方程 $A * T = B$ 的基本解为满足 $A * E = \delta$ 的分布 E，并称基本解 E 是 A 关于卷积的

一个逆元，记为 $A^{*(-1)}$。若卷积方程 $A*T=B$ 的基本解 E 存在，则称 A 可逆。

倘若卷积方程 $A*T=B$ 的基本解 E 存在，并且其常数项 B 的支集为紧，那么就可以由该基本解得到卷积方程 $A*T=B$ 的解 $E*B$。这是因为卷积运算的性质使得

$$A*(E*B)=(A*E)*B=\delta*B=B \tag{5.3}$$

需要注意的是，若常数项 B 和基本解 E 的支集非紧，则式(5.3)便无意义，此时上述方法便失效。但是对于其他的一些情形，式(5.3)仍有意义。如当 E 属于 (D'_{L^1}) 且 B 属于 (B') 时，上述公式就成立。再比如当 A，E 和 B 的支集都关于圆锥 Γ 左有界时，E 就是代数 $(D'_{+\Gamma})$ 中那个唯一等于 A 的逆元的分布。

至此，施瓦兹通过定义卷积方程的基本解，给出了一个求解该方程的思路。除此之外，分析问题代数化的思想使施瓦兹得到了一种更为一般的求解卷积方程的方法。这一思路亦应归功于布尔巴基学派，他对此有着这样的表述：

“布尔巴基的风格趋向总是代数的多于分析的。我从布尔巴基获得的最重要事情是被‘代数化’了。我本来是个分析学家，我所有的工作都是关于分析和概率的，没有代数理论。但是我尽可能运用代数学和代数方法。比起使用局部坐标的方法，我更喜欢内在表述，例如当讨论流形和联络的时候。这正是布尔巴基的风格，然而绝大多数分析学家都像黎曼和嘉当(E. Cartan，1869—1951)那样通过指标来书写公式。我是最代数的分析学家之一，而这来自布尔巴基。”

现在问题的关键就在于如何利用分析代数化思想把卷积方程转化为代数学内容。对于这一问题，傅里叶变换给出了完美解答。傅里叶变换有许多好的性质，其中之一就是卷积定理，即傅里叶变换可以把卷积运算转化为代数运算。

事实上，早在傅里叶时代，傅里叶变换的这一优点就被数学家所发现。在傅里叶、柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)和泊松眼中，傅里叶变换最大的优点在于它能够把常系数线性偏微分方程简化为代数问题。这是基于这样的事实：微分 f' 的傅里叶变换是函数 $x\mapsto 2\pi \mathrm{i}xF[f(x)]$。基于这一思路，施瓦兹在《分布理论》中对卷积方程 $A*T=B$ 的求解有这样的表述(见图 5.16)：

“对于方程 $A*T=B$，其中 A，T 和 B 是 X^n 上的分布。

……

设 $a = F(A)$，$t = F(T)$，$b = F(B)$，则 a，t 和 b 是空间 Y^n 上的分布。上述方程 $A * T = B$ 完全等价于方程 $at = b$。

现在我们就得到了一个乘积方程，从而就把先前的问题转化为除法问题。”

Transformation de Fourier des équations de convolution.

Considérons l'équation

(VII, 10; 1)　　　　$A * T = B$

analogue à (VI 10; 1), A, T, B, étant des distributions sur l'espace à n dimensions X^n.

Soient alors $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}$, les transformées de Fourier $\mathfrak{A} = \mathfrak{F}A$, $\mathfrak{T} = \mathfrak{F}T$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{F}B$; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{B}$, sont des distributions sur l'espace Y^n. (VII, 10; 1) est entièrement équivalente à

(VII, 10; 2)　　　　$\mathfrak{A}\mathfrak{T} = \mathfrak{B}$.

Nous avons maintenant une équation multiplicative; le problème posé est devenu un problème de division (chapitre v, §§ 4 et 5), d'où l'importance du problème de la division. $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{B}$ sont des distributions tempérées $[\in(\mathscr{S}')]$, $\mathfrak{A}$ est une fonction indéfiniment dérivable à croissance lente $[\in(\mathcal{O}_M)]$.

图 5.16　施瓦兹通过分布的傅里叶变换把卷积方程转化为代数方程

也就是说，施瓦兹的这一求解策略是以分析代数化思想为指导的，借助分布傅里叶变换这一有力工具先把卷积方程转化为代数方程，然后在代数方程的求解基础上通过傅里叶反演公式得到原方程的解。

5.3.2　求解策略中存在的问题

通过上述分析可知，施瓦兹不仅想要求解卷积方程，而且探究了求解卷积方程的基本解的方法和借助傅里叶变换把卷积方程转换为乘积方程的方法。毫无疑问，他的求解思路极具一般性，且非常完美。然而，对此进行细致分析便可发现，上述策略存在着以下几个关键问题。

首先是分布的卷积运算。也就是说，什么样的分布能够进行卷积运算？

其次就是基本解的存在性及求解问题。如果卷积方程的基本解根本就不存在，那么显然无法运用基本解思路进行卷积方程的求解。另外，根据卷积运算的性质可知：仅当基本解存在且卷积方程的常数项支集为紧时才可以运用基本解方法。除此之外，在基本解存在的情况下，基本解方法仅适用于某些情形。

因此，施瓦兹自然地提出了这样一个问题：若卷积方程的基本解存在，也就是说 A 可逆时，是否一定能够由此来求解带任意常数项 B 的卷积方程？倘若答案是肯定的，那么基本解方法的适用范围就会被扩大很多。

再者就是分布的傅里叶变换问题。这个问题的重要程度毋庸置疑，这是因为它不仅可以提供一种求解卷积方程基本解的有效方法，而且可以直接用来求解卷积方程。通常函数的傅里叶变换需要满足一定限制条件，那么任意分布能否实施傅里叶变换？倘若可以，又该如何来定义呢？

最后，还需要解决分布的除法问题。倘若该问题不被解决，那么同样无法顺利按照施瓦兹的思路来求解卷积方程，正如他所言：

“分布除法的价值在于，它可借助分布的傅里叶变换来解决偏微分方程理论和积分方程理论中的一些基本问题。”

乘法与除法互为逆运算，且对于变系数方程而言，分布的乘积运算是不可避免的，因而分布的乘法问题同样重要。

这就解释了施瓦兹在考察分布空间的代数结构时，为什么研究了分布的乘法和除法、张量积和卷积运算，以及分布的傅里叶变换。首先，施瓦兹考察了分布的乘法运算，指出不可能定义任意两个分布之间的乘积。这是因为分布是古典函数概念的推广，因而当两个分布 S 和 T 为通常的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 时，它们的乘积 ST 应当与通常函数的乘积 $f(x)g(x)$ 一致，但这是不可能的。例如，若函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在任意紧集上可和，但其乘积 $f(x)g(x)$ 并不一定可和，则无法定义一个分布。

施瓦兹发现若要乘积 ST 有意义，则分布 S 在局部上的正则程度要超过分布 T 的不正则程度。可以肯定的是，任意分布与无穷可导函数的乘积总是有意义的。因此，施瓦兹定义了分布与无穷可导函数的乘积，也就是说，无穷可导函数空间是任意分布的乘子空间。

随后，施瓦兹将两个函数和测度的张量积表示成泛函形式，将此推广到任意两个分布上，得到了分布的张量积。定义张量积的主要目的在于定义卷积，这一点不仅可以从前面我们考察施瓦兹定义卷积的过程中看到，而且他在《分布理论》关于张量积那一章的内容提要中明确指出：

“对于这一章，读者可以快速浏览，这一章的主要价值在于用来定义卷积。”

在分布张量积的基础上，施瓦兹重点考察了分布的卷积运算。类似于分布的乘积，他发现同样不能定义任意两个分布的卷积，定义卷积的唯一障碍在于分布在无穷远处的增长性。这点与分布的乘积完全不同，影响乘积运算的是分布在局部上的正则程度，而非无穷远处的正则性。因此，对于分布的卷积，施瓦兹指出，要求至多除了一个因子之外，其余因子全部在无穷远处完全正则，即其支集为紧。这就解释了为什么在用基本解方法求解卷积方程时要限定非齐次项的支集为紧。

再者，就是分布的除法问题，然而这一问题并不好解答。对单变量情形，施瓦兹考察了以 x 的幂为分母的除法。多变量的除法问题就更为棘手，施瓦兹仅在他的《分布理论》中讨论了一些简单情形，这些成果是他与赫尔曼德尔(L. Hörmander，1931—2012)和洛雅希维奇(S. Lojasiewicz，1926—2002)数学成果的综合。

接下来，也是极其重要的，是分布傅里叶变换的定义。傅里叶变换不仅可以直接求解卷积方程，而且是求解基本解的一种有效方法。在施瓦兹 1945 年的文章之后，他紧接着的研究成果就是在 1947 年发表了一篇关于分布傅里叶变换的文章。那篇文章就解决了分布傅里叶变换这一问题，这再次印证了分布傅里叶变换的棘手性，以及它在施瓦兹整个广义函数理论中的重要性。施瓦兹发现任意分布傅里叶变换的任意可接受定义都会给该元素增加一些与分布的性质不相容的性质，因而他指出不可能定义任意分布的傅里叶变换。

对分布傅里叶变换的定义，施瓦兹并不是一次就成功给出的，其间经历了一些挫折，但是最终还是在速降无穷可导函数空间的引入下，成功定义了缓增分布的傅里叶变换。后面我们对他定义分布傅里叶变换的过程进行细致考察，将不难看出速降无穷可导函数空间是解答这一问题的突破口。也就是说，正是速降无穷可导这一恰当基本函数空间的引进，才使得施瓦兹成功解决了分布傅里叶变换问题。为此，他的学生格罗滕迪克称速降无穷可导函数空间为施瓦兹空间，以此来纪念其导师的这一伟大贡献。

最后来看基本解的存在性问题。基本解的存在性问题，即为卷积方程 $A*T=B$ 中分布 A 的可逆性问题。施瓦兹的学生马尔格朗日(B. Malgrange，1928—)在其博士论文中证明了多项式求导算子 $A=\sum\limits_{|p|\leqslant m} a_p D^p \delta$ 可逆。

并非任意分布都能做卷积这一事实使施瓦兹提出了这样的问题：当 A 可逆时，是否一定能够由此来求解带任意常数项 B 的卷积方程？对这一问题，施瓦兹指出若答案是肯定的，则称 A 完全可逆。他发现非齐次项 B 总可以表示成支集为紧且彼此无限远离的分布之和，即 $B=\sum_{v} B_v$ 。

如果设 $T_v = E * B_v$ ，那么级数 $\sum_{v} T_v$ 在一般情况是发散的。但这些 T_v 在 R^n 中越来越大的开集上将变成齐次方程的解，因而他假设能够在越来越大的开集上用 S_v 来逼近 T_v ，从而使级数 $\sum_{v}(T_v - B_v)$ 在分布空间 (D') 中收敛，其中 S_v 在整个空间上是齐次方程的解。据此便有 $A*\sum_{v}(T_v - S_v)=\sum_{v}(A*T_v - A*S_v)=\sum_{v} B_v = B$ ，这样就求得了非齐次方程的解。另外，施瓦兹指出多个完全可逆分布的卷积是完全可逆的。

埃伦普里斯（L. Ehrenpreis，1930—2010）在其 1955 年的文章“完全可逆算子”中指出任意可逆分布是完全可逆的，但他并没有在这篇文章中给予证明。除此之外，他还论证了任意支集仅包含有限多个点的分布是完全可逆的。

对于基本解，施瓦兹还有这样的论述：

“基本解属于符号计算方法或代数计算方法的范畴，可以通过多种不同方法求解基本解，如偏微分方程理论的方法、积分方程理论的方法、傅里叶变换和拉普拉斯变换法。”

在定义了分布傅里叶变换之后，他便运用傅里叶变换求解了一些算子的基本解。

5.4　缓增分布与傅里叶变换

在卷积方程求解策略的激励下，施瓦兹在 1947 年 9 月完成了一篇关于分布傅里叶变换的专题性学术论文——“分布理论和傅里叶变换”，依旧发表在《格勒诺布尔大学学报》上（见图 5.17）。在这篇文章中，他仅研究了分布的傅里叶变换问题。这篇文章由 7 个部分构成，分别是引言、通常的傅里叶变换、球形分布、球形分布空间上的傅里叶变换、例子、非负型分布和偏微分方程。

ANNALES DE L'UNIVERSITÉ DE GRENOBLE

LAURENT SCHWARTZ

Théorie des distributions et transformation de Fourier

Annales de l'université de Grenoble, tome 23 (1947-1948), p. 7-24.

NUMDAM

图 5.17　施瓦兹于 1947 年完成的文章

5.4.1　施瓦兹空间和球形分布

首先，施瓦兹在这篇文章的引言中给出了一系列概念，其中大部分是他在 1945 年的那篇文章中引入的，如分布、分布空间、分布的导数、分布的乘法以及分布的合成积。这里需要强调的是以下几个概念，它们是施瓦兹在其 1945 年的文章中未曾提及或是有所改进的。

其一，施瓦兹在这篇文章的引言中明确提出函数空间 D。它由所有 n 个变量的无穷可导且在紧集外取值为零的函数构成，并用记号“D”取代 1945 年文章中的“Φ”。其二，他在这里引入了函数的“支集”概念，用以代替 1945 年文章中函数的“核”。不难看出，这里的函数空间 D 就是我们现在熟知的基本函数空间 D。在支集概念的基础上，施瓦兹给出了基本函数空间 D 中函数序列 φ_j 收敛于零的定义，即若函数序列 φ_j 的支集均包含在一个固定紧集中，且 φ_j 自身及其各阶导数均一致收敛于零，则称 $\varphi_j \in D$ 收敛于零。其三，对定义在基本函数空间 D 上的分布构成的分布空间，施瓦兹用记号“D'”代替 1945 年文章中的“E”。

分布是古典函数概念的推广，这就要求在定义分布的各种运算时必须保证当分布为通常意义下的函数时，该分布的运算要与相应的通常意义下的函数运算保持一致。另外，分布是具有紧支集的无穷可导函数空间上的连续线性泛函。这表明可以把通常函数的各种运算表示成泛函的形式，从而寻求推广的可能性。

从施瓦兹 1945 年的文章中可以清楚地看出他的工作方式为：先从通常意义下的函数运算出发，再把通常意义下函数的各种运算表示成泛函形式，进而寻求对古典函数运算进行合理推广的方法，由此得到分布的相应运算。施瓦兹定义分布傅里叶变换的过程再次印证了他的这一思路，现在就来考察他是如何定义分布傅里叶变换的。

对于分布的傅里叶变换，按照施瓦兹的工作方式，他应该先从函数傅里叶变换的定义入手。的确，在这篇文章的引言之后他就开始考察通常的傅里叶变换。通常意义下，函数的傅里叶变换把变量为 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 变成变量为 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的函数 $g(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，即有公式

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\iint\cdots\int f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\exp.(-2\mathrm{i}\pi(x_1y_1+\cdots+x_ny_n))\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$

为了简便起见，记 n 维空间 X^n 中的元素为 $x=x_1,x_2,\cdots,x_n$，同理 n 维空间 Y^n 中的元素记为 $y=y_1,y_2,\cdots,y_n$，两个空间的体积元记为 $\mathrm{d}x=\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$ 和 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}y_1\mathrm{d}y_2\cdots\mathrm{d}y_n$，$x$ 和 y 的点积记为 $x\cdot y=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$，则上述傅里叶变换及其反演公式可表示为

$$g(y)=\iint\cdots\int f(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$$

与

$$f=\bar{F}g\text{，或 }f(x)=\iint\cdots\int g(y)\exp.(+2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y$$

如果记函数 f_1 和 f_2 的傅里叶变换分别为 $g_1=Ff_1$，$g_2=Ff_2$，则有帕塞瓦尔公式

$$\iint\ldots\int f_1(x)\overline{f_2(x)}\mathrm{d}x=\iint\cdots\int g_1\left(y\right)\overline{g_2(y)}\,\mathrm{d}y$$

或

$$\iint\ldots\int f_1(x)f_2(x)\mathrm{d}x=\iint\cdots\int g_1(y)g_2(-y)\mathrm{d}y$$

我们知道，函数的傅里叶变换必须在一定条件下才有意义，也就是说，上述公式仅在非常强的限制条件下有意义。例如，函数 f 的傅里叶变换需要 f 可积或单调，帕塞瓦尔公式要求函数 f 和 g 平方可积。对分布的傅里叶变换，施瓦兹在“分布理论和傅里叶变换”这篇文章的第二节最后强调：

“我们将在非常一般的分布框架下来定义傅里叶变换，且赋予互逆公式 $f(x)=\iint\cdots\int g(y)\exp.(+2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y$ 和 $g(y)=\iint\cdots\int f(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$ 相同的价

值。但这在最一般情况下是不可能的，因为任意分布的傅里叶变换不再是一个分布。我们将定义一个分布子空间，它可以定义傅里叶变换的空间。”

不难看出，施瓦兹已经意识到并不是任意分布都能定义它的傅里叶变换，这里同样需要一些限制，只能对分布空间 D' 的子空间中的元素实施傅里叶变换。分布是定义在基本函数空间上的连续线性泛函，不同的基本函数空间可以定义具有不同特性的分布，这启发施瓦兹先引入恰当的基本函数空间。

的确，施瓦兹在这篇文章“球形分布”这一节的第一段便引进了基本函数空间 S，它由所有满足下列两个条件的函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 构成：

(1) 函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在通常意义下无穷可导；

(2) 函数 $\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 自身及其各阶导数在无穷远处趋近于零的速度比 $\dfrac{1}{r}(r^2=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)$ 的任意次幂都要快。

也就是说，若函数 $\varphi\in S$，则任意多项式与函数 φ 的导数的乘积(或函数 φ 与任意多项式乘积的导数)是有界函数，反之亦然。施瓦兹称这里的函数 φ 是“速降无穷可导函数”，并指出支集为紧的无穷可导函数空间 D 是速降无穷可导函数空间 S 的子空间。接着，他引入函数空间 S 中的收敛概念。

定义：若任意多项式与 $\varphi_j\in S$ 的导数的乘积(或 $\varphi_j\in S$ 与任意多项式乘积的导数)一致收敛于零，则称 $\varphi_j\in S$ 在基本函数空间 S 中收敛于零。

易知，若 $\varphi_j\in D$ 在基本函数空间 D 中收敛于零，则它亦在 S 中收敛于零，但反之不成立。由此，施瓦兹指出基本函数空间 S 的子空间 D 关于 S 中的收敛定义在 S 中稠密。

需要说明的是，在这篇文章中施瓦兹并没有指出这里“函数 φ 的导数”和“函数 φ 与任意多项式乘积的导数”是经过怎样的求导过程得到的。但在《分布理论》中他明确指出这里的导数是多项式求导算子 $D=\sum\limits_p A_pD^p$ 与函数 φ (或函数 φ 与任意多项式乘积)的卷积，其中 p 是 n 个非负整数构成的数组，A_p 是复值常数。

自然地，施瓦兹定义了基本函数空间 S 上的连续线性型 $T(\varphi)$，即若 $\varphi_j\in S$ 在 S 中收敛于零，则数 $T(\varphi_j)$ 必收敛于零。他称所有这种连续线性型构成了球形分

布空间 S'，也就是说，球形分布空间 S' 是基本函数空间 S 的拓扑对偶。随后，他论证了球形分布空间 S' 是分布空间 D' 的子空间，引进了球形分布空间 S' 中的收敛概念，给出了球形分布的例子，例如在无穷远处缓增的可测函数 $f(x)$。若存在恰当的值 k，使得 $\iint\cdots\int \frac{|f(x)|}{(1+r^2)^k}\mathrm{d}x<+\infty$，则它是球形分布。的确，对 $\varphi\in S$，由于可和函数可以定义一个函数型分布，因而它定义了一个连续线性型 $f(\varphi)$：

$$f(\varphi)=\iint\cdots\int f(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x$$

另外，施瓦兹在这里提到球形分布的乘法和卷积运算。需要指出的是，他在这篇文章中并没有引进球形分布的乘积和卷积算子空间，但在《分布理论》中，他详细引入并讨论了球形分布的乘积算子空间——无穷可导缓增函数空间 O_M，以及卷积算子空间——速降分布空间 O_c'。

值得注意的是，施瓦兹在“球形分布”这一节的最后提出了这样的一个问题：为什么取名为球形分布呢？对这个问题，他用一个定理来回答(见图 5.18)。

定理：R^n 上的分布 $T\in D'$ 是球形分布的充分必要条件是它能被延拓到球面 S^n 上的分布。

Pour qu'une distribution T∈$(\mathcal{D}')$, *distribution sur l'espace* R^n, *soit sphérique, il faut et il suffit qu'elle soit prolongeable en une distribution sur la sphère* S^n.

图 5.18　分布 $T\in D'$ 是球形分布的充分必要条件

这就不难理解为什么施瓦兹称定义在基本函数空间 S 上的连续线性型为球形分布。需要强调的是，球形分布就是我们现在所知的缓增分布，施瓦兹在《分布理论》中已经用“缓增分布”名称替代“球形分布”。在《分布理论》中，他不仅给出了空间 S' 的几何解释，即“球形分布”名称的由来，而且探究了空间 S' 中元素的具体结构，论证了如何用增长性来刻画分布空间 S' 中的元素(见图 5.19)。

定理：(1) 分布 $T\in D'$ 是缓增分布的充分必要条件为：它为通常意义下缓增连续函数的导数。也就是说，该连续函数是 $P(x)=(1+r^2)^{\frac{k}{2}}$ 与 R^n 上某一连续函数的乘积：$T=D^p\left[P(x)f(x)\right]=D^p\left((1+r^2)^{\frac{k}{2}}f(x)\right)$。

(2) 分布 $T \in S'$ 的充分必要条件是：它的所有正则化 $T * \alpha(\alpha \in D)$ 为缓增连续函数；且存在实数 k，使得 $\frac{T * \alpha}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}$ 是 R^n 上的有界连续函数。

(3) 若要分布 $T \in S'$，则必须存在实数 k，使得分布 $\frac{T}{(1+r^2)^{\frac{k}{2}}}$ 在 R^n 上有界，且仅需要对任意 $\varphi \in S$，φT 在 R^n 上有界。

(4) 若要分布 $T \in S'$，则必须存在实数 k，使得所有分布 $\frac{\tau_h T}{(1+|h|^2)^{\frac{k}{2}}}$ 构成 D' 的一个有界集，且仅需要对任意当 $|h| \to \infty$ 时速降的数值连续函数 $c(h)$，所有 $c(h)\tau_h T$ 构成 D' 的一个有界集。

Théorème VI *Pour qu'une distribution* $\mathrm{T} \in (\mathcal{D}')$ *soit tempérée, il faut et il suffit qu'elle soit une dérivée d'une fonction continue à croissance lente au sens usuel, c'est-à-dire d'une fonction qui est le produit de* $\mathrm{P}(x) = (1 + r^2)^{k/2}$ *par une fonction continue bornée sur* R^n :

$$(\mathrm{VII},\ 4;\ 1) \qquad \mathrm{T} = \mathrm{D}^p[\mathrm{P}(x)f(x)] = \mathrm{D}^p\left((1 + r^2)^{\frac{k}{2}} f(x)\right).$$

2° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il faut et il suffit que toutes ses régularisées* $\mathrm{T} * \alpha$, $\alpha \in (\mathcal{D})$, *soient des fonctions continues à croissance lente; il existe alors un nombre réel* k *tel que les* $(\mathrm{T} * \alpha)/(1 + r^2)^{k/2}$ *soient toutes des fonctions continues bornées sur* R^n.

3° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel* k *tel que la distribution* $\mathrm{T}/(1 + r^2)^{k/2}$ *soit bornée sur* $\mathrm{R}^n (\in (\mathcal{B}')$, *voir chapitre* VI, § 8), *et suffisant que pour toute fonction* $\varphi \in (\mathcal{S})$, $\varphi\mathrm{T}$ *soit bornée sur* R^n.

4° *Pour qu'une distribution* T *appartienne à* $(\mathcal{S}')$, *il est nécessaire qu'il existe un nombre réel* k *tel que les distributions* $\tau_h\mathrm{T}/(1 + |h|^2)^{k/2}$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$, *et suffisant que, pour toute fonction numérique* $c(h)$ *à décroissance rapide pour* $|h| \to \infty$, *les* $c(h)\tau_h\mathrm{T}$ *soient bornées dans* $(\mathcal{D}')$.

图 5.19 施瓦兹用增长性来刻画球形分布的定理

这就解释了施瓦兹为什么要用“缓增分布”这个名词。缓增分布空间正是可以定义分布傅里叶变换的恰当子空间，下面就来考察施瓦兹如何在缓增分布空间的基础上定义分布傅里叶变换的。

5.4.2　球形分布的傅里叶变换

在恰当基本函数空间及其对偶空间的基础上，施瓦兹在这篇文章的第四节探讨了分布的傅里叶变换。首先，速降无穷可导函数的自身特性使它不仅具有傅里叶变换，而且其傅里叶变换仍然是速降无穷可导函数，从而它就具有傅里叶逆变换公式。

若函数$u(x)$是n维空间X^n上的速降无穷可导函数空间$(S)_x$中的任意元素，则函数$u(x)$可和，因而它有通常意义下的傅里叶变换。根据公式$g(y)=\iint\cdots\int f(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$，则有$v(y)=\iint\cdots\int u(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$。

容易验证$v(y)$是n维空间Y^n上的速降无穷可导函数空间$(S)_y$中的元素。这是因为一方面公式$v(y)=\iint\cdots\int u(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$中的函数是无穷可导的。例如，对

$$\frac{\partial}{\partial y_1}v(y)=\iint\cdots\int u(x)(-2\mathrm{i}\pi x_1)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$$

由于$x_1u(x)$可和，因而上式右边的积分有意义。事实上，正是函数$u(x)$在无穷远处速降的特性保证了函数$v(y)$的无穷可导性。

另一方面，反过来由分部积分法可得

$$2\mathrm{i}\pi y_1v(y)=\iint\cdots\int\frac{\partial}{\partial x_1}u(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$$

由于上式右边的被积函数可和，因而$y_1v(y)$有界。如此这样继续下去，便可知函数u的各阶导数均可和，因而函数v在无穷远处速降。

因此，上述两个性质可互换。若$u\in(F)_x$，则它本身及其各阶导数均速降，从而函数v及其各阶导数速降，这就验证了$v(y)$属于$(F)_y$。自然地，公式$v(y)=\iint\cdots\int u(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$的反演公式为

$$u(x)=\iint\cdots\int v(y)\exp.(+2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y$$

另外，对$(F)_x$和$(F)_y$中的函数，帕塞瓦尔公式均成立。

再者，施瓦兹指出可以通过上述论证由$u\in(F)_x$导出$v\in(F)_y$的思路来证明，若u_j在$(F)_x$中收敛于零，则其傅里叶变换v_j也在$(F)_y$中收敛于零。由此他便得出下述论断：

“通常的傅里叶变换F及其共轭$\overline{F}$在拓扑空间$(F)_x$和$(F)_y$之间建立了两个互逆的同构映射(并且如果将两个变量x和y看成相同的，那么它们在拓扑空间(F)上建立了两个互逆的自同构映射)。”

现在，施瓦兹就可以很容易地定义任意球面分布U的傅里叶变换。若U是一个具有通常傅里叶变换V的函数(例如，U是平方可积函数)，则对任意$u\in(F)_x$及其傅里叶变换$v\in(F)_y$，有帕塞瓦尔公式

$$\iint\cdots\int V(y)\,v(y)\mathrm{d}y=\iint\cdots\int U(x)u(-x)\mathrm{d}x$$

将该式用泛函的记号可表示为$V(v(y))=U(u(-x))$。

若U是$(F')_x$中的任意球形分布，则上述公式定义了一个唯一确定的线性型$V(v)$，$V(v)=U\left(\iint\cdots\int v(y)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y\right)$。也就是说，$FU.v=U.Fv$。

施瓦兹论证上述线性型的确定义了$(F')_x$中的一个球形分布，这样他就把经典傅里叶变换推广到了球形分布上，得到了球形分布的傅里叶变换(见图 5.20)。

Il est maintenant très facile de définir la transformée de Fourier d'une distribution sphérique quelconque U. Si U est une fonction ayant une transformée de Fourier usuelle V (par exemple si U est de carré sommable), on a, quelle que soit $u\in(\mathcal{S})_x$ et sa transformée de Fourier $v\in(\mathcal{S})_y$, la formule de Parseval

$$\iint\cdots\int \mathrm{V}(y)v(y)dy=\iint\cdots\int \mathrm{U}(x)u(-x)dx \tag{17}$$

ou

$$\mathrm{V}(v(y))=\mathrm{U}(u(-x)) \tag{18}$$

cette dernière notation étant la notation fonctionnelle (1).

Mais si U est une distribution sphérique quelconque $\in(\mathcal{S}')_x$, la formule (18) définit, *d'une manière bien déterminée et unique*, une forme linéaire V(v) qui peut s'expliciter :

$$\mathrm{V}(v)=\mathrm{U}\left(\iint\cdots\int v(y)\,\mathrm{exp.}\,(-2i\pi x\,.\,y)dy\right). \tag{19}$$

图 5.20 施瓦兹定义的球形分布的傅里叶变换

如果用傅里叶变换F的共轭$\overline{F}$代替F，那么公式$V(v(y))=U(u(-x))$仍成立。对于这两种情形，施瓦兹得到$\begin{cases}FU(v)=U(Fv)\\ \overline{F}U(v)=U(\overline{F}v)\end{cases}$。

这就表明从球形分布空间 $(F')_x$ 到球形分布空间 $(F')_y$ 的傅里叶变换是从速降无穷可导函数空间 $(F)_y$ 到速降无穷可导函数空间 $(F)_x$ 的转置。由此便有

$$\bar{F}FU(v)=FU(\bar{F}v)=U(F\bar{F}v)=U(v) \quad \text{或} \quad \bar{F}FU=U,\ \bar{F}FV=V$$

因而变换 F 与其共轭 $\bar{F}$ 互逆。另外，类似速降无穷可导函数空间上傅里叶变换的特性，施瓦兹得到了球形分布傅里叶变换的下述论断：

“傅里叶变换 F 及其共轭 $\bar{F}$ 在拓扑空间 $(F')_x$ 和 $(F')_y$ 之间建立了两个互逆的同构映射；并且如果将两个变量 x 和 y 看成相同的，那么它们在拓扑空间 (F') 上建立了两个互逆的自同构映射。”

在第四节的最后，施瓦兹指出傅里叶变换可以让两个球形分布的乘积与合成积运算相互转换，即

$$\begin{cases} F(U_1U_2)=FU_1*FU_2=V_1*V_2 \\ F(U_1*U_2)=(FU_1)(FU_2)=V_1V_2 \end{cases}$$

需要指出的是，施瓦兹在这里并没有对此性质进行论述，在《分布理论》中他详细讨论了傅里叶变换的这一性质。在讨论完分布傅里叶变换之后，施瓦兹给出了 4 个分布傅里叶变换的实例，这些内容构成了文章“分布理论与傅里叶变换”的第五节。

例 1　$\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}$ 的傅里叶变换。根据公式 $V(v)=U\left(\iint\cdots\int v(y)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y\right)$，立刻可得 $V(v)=\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}\left(\iint\cdots\int v(y)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}y\right)=\iint\cdots\int v(y).2\mathrm{i}\pi y_1\mathrm{d}y$ 或 $V=2\mathrm{i}\pi y_1$，从而得到 $\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}$ 的傅里叶变换是 $2\mathrm{i}\pi y_1$。

借助 $\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}$ 的傅里叶变换，再根据卷积傅里叶变换是傅里叶变换乘积的性质，施瓦兹得到了任意球形分布 U 的偏导数的傅里叶变换，即 $F\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\right)=2\mathrm{i}\pi y_1F(U)$，这是因为 $F\left(\dfrac{\partial U}{\partial x_1}\right)=F\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}*U\right)=F\left(\dfrac{\partial\delta}{\partial x_1}\right)\cdot F(U)=2\mathrm{i}\pi y_1F(U)$。

例 2 泊松求和公式。设分布$U=\sum_l \delta_l$，其中l是R^n上的点，其整点坐标为$l_1,l_2,\cdots,l_n$，δ_l是位于该点处的质量 1。由于可以将环面上的狄拉克测度与R^n上的分布$\sum_l \delta_l$视为相同的，并且可知在环面上计算其傅里叶系数均为 1，因而有$F\left(\sum_l \delta_l\right)=\sum_l \delta_l$。对该公式应用帕塞瓦尔公式即得泊松求和公式$\sum_l u(l)=\sum_l v(l)$，其中$u$和$v$均为速降无穷可导函数，且$v=Fu$。

例 3 设U为缓增函数$f(x)$，Ω是有界开集。f_Ω表示在Ω上等于$f(x)$且在Ω外取值为零的函数，则当开集Ω足够大时，f_Ω在$(S')_x$[①]中趋于f。再根据傅里叶变换F的连续性，则有$F(f_\Omega)$在$(S')_y$中收敛于$F(f)$，且$F(f_\Omega)$可由通常的傅里叶积分来计算，因而有

$$F(f)=\lim_{\Omega}\iint\cdots\int_{\Omega} f(x)\exp.(-2\mathrm{i}\pi x\cdot y)\mathrm{d}x$$

对于古典重积分，仅当绝对收敛时，重积分才不依赖区域Ω趋于无穷的方式而收敛。与古典重积分的这一性质不同，尽管$\iint\cdots\int\left|f\left(x\right)\right|\mathrm{d}x=+\infty$，但上述积分仍收敛。

例 4 佩利–维纳定理的推广。经典的佩利–维纳定理给出了平方可和函数的傅里叶变换具有紧支撑的充分必要条件，即它解析且可以被延拓成关于复变量的指数型整函数[②]。施瓦兹把该定理推广到分布上，得到了广义佩利–维纳定理（见图 5.21）：

> On peut généraliser comme suit :
>
> Pour qu'une distribution sphérique $V\in(\mathscr{S}')_y$ soit transformée de Fourier d'une distribution U à support compact, il faut et il suffit que V soit une fonction, prolongeable analytiquement pour les valeurs complexes des variables en une fonction entière de type exponentiel, et qu'elle soit pour les valeurs réelles des variables, « à croissance lente à l'∞ ».
>
> Nous ne donnerons pas la démonstration, qui est un peu délicate.

图 5.21 施瓦兹得到的广义佩利–维纳定理

---

① $(S')_x$表示缓增分布空间。

② 函数$f(z_1,z_2,\cdots,z_n)$被称为指数型整函数是指：存在大于零的数c，使得对任意$z_1,z_2,\cdots,z_n$有$\left|f\left(z_1,z_2,\cdots,z_n\right)\right|\leqslant\exp.\left[c\left(|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|\right)\right]$成立。

分布 U 的傅里叶变换 $V \in (F')_y$ 支集为紧的充分必要条件是，它是一个解析函数，并且可以被延拓成关于复变量的指数型整函数。

需要说明的是，施瓦兹在这篇文章中指出广义佩利–维纳定理的证明有些棘手，他将不在这里给予证明。但是在《分布理论》中，他对该定理进行了详细论证。

在《分布理论》中，施瓦兹不仅详细考察了上述 4 个实例，而且探讨了空间 (D'_{L^1}) 中的元素和埃尔米特多项式的傅里叶变换、距离的函数、亚纯函数、双曲距离以及通过逐次积分来计算傅里叶变换。

5.4.3　分布傅里叶变换的应用

在通过引入速降无穷可导基本函数空间而解决了分布傅里叶变换之后，施瓦兹考察了分布傅里叶变换在偏微分方程研究中的应用。这一应用不仅体现出分布傅里叶变换的重要价值，而且为偏微分方程的研究提供了一个新视角。施瓦兹在这篇文章最后一节的开始就强调说：

“傅里叶变换非常适合研究常系数线性偏微分方程。的确，常系数线性偏微分方程可记为

$$DT = 0 \quad 或 \quad D\delta * T = 0$$ [①]

其中 D 是常系数多项式求导算子，T 是未知分布。

假设 $T = U$ 是球形分布，则可以对其实施傅里叶变换。若记傅里叶变换 $F(D\delta)$ 是关于变量 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 的普通多项式 H，且 $V = F(U)$，则得到乘积方程 $HV = 0$。”

可以看出，施瓦兹先通过求导是一种卷积运算的性质把常系数线性偏微分方程看成一种特殊的卷积方程，再利用傅里叶变换把卷积方程转化成乘积方程，这样他就把常系数线性偏微分方程的求解转换成代数方程的求解。

然而值得注意的是，方程 $HV = 0$ 是由分布理论产生的一种新型方程，给出该方程解 V 的一般表达式是件困难的事情。即便如此，施瓦兹仍然考察了它的一些特性。施瓦兹主要考察了当 H 恒不为零、H 在某点处为零和 H 在某一闭集

① 由求导是一种卷积运算可知，$DT = 0$ 等价于 $D\delta * T = 0$。

上为零的情形。针对这几种不同情形，他举出了实例。例如，若微分方程$DT=0$形如$\Delta T-w^2T=0$，其中w是不等于零的实常数，则通过简单计算可知$H=-4\pi^2r^2-w^2$。

诚然，在实数域内$H=-4\pi^2r^2-w^2=0$不存在，因而方程$\Delta T-w^2T=0$的唯一球形分布解为零解。倘若H至少在某一点a处为零，则方程$HV=0$至少有在a点处质量为1的δ_a测度解，且方程$DT=0$有解$\exp.(+2\mathrm{i}\pi a\cdot x)$。如对拉普拉斯方程$\Delta T=0$，可知$H=-4\pi^2r^2$，显然$H=-4\pi^2r^2$仅在原点处有一个实零点。再者，若微分方程$DT=0$形如$\Delta T+w^2T=0$，其中$w$亦为不等于零的实常数，则通过计算可知$H=-4\pi^2r^2+w^2$。易知$H=-4\pi^2r^2+w^2$在闭集$\Sigma$上等于零，因而方程$\Delta T+w^2T=0$有无限多个球形分布解。

通过上述分析不难看出，在分布观念下，施瓦兹把常系数线性偏微分方程视为一种卷积方程来考察。在《分布理论》中，施瓦兹直接对一般的卷积方程进行考察，上述内容即为《分布理论》中“齐次卷积方程”的特殊情形。除此之外，他还在《分布理论》中考察了非齐次卷积方程、椭圆方程、迭代拉普拉斯方程、迭代热传导方程、双曲方程、积分方程的基本解，弗雷德霍姆定理以及常数项是任意球形分布的方程。

5.5 广义函数的拉普拉斯变换

紧随1947年9月关于分布傅里叶变换的文章，施瓦兹在1948年1月又完成了一篇题为“函数和导数概念的推广——分布理论”的文章，随后这篇文章发表在《电信年鉴》上。

如果说施瓦兹1945年和1947年的那两篇文章是写给数学家的，那么1948年的这篇文章就是写给电子工程师的。这篇文章不仅是对他前面两篇文章内容的补充与完善，而且为电子工程师们提供了一篇关于分布理论的解说性文章。这是因为他运用更有利于工程师们阅读和掌握的语言，不仅表述了他1945年和1947年那两篇文章的主要内容，如分布概念的引进、分布的导数、合成积及傅里叶变换等，而且探讨了分布的拉普拉斯变换。

除了摘要和引言之外，这篇文章的主体由八个部分构成。首先，施瓦兹在前两节介绍了古典函数概念的推广，即由古典函数到测度，再到分布。接着，

他在第三、四、五和六节分别讨论了分布的导数、乘法、积分和卷积。最后，他在第七节和第八节分别考察了分布的傅里叶变换和拉普拉斯变换。在摘要中，施瓦兹介绍了他这篇文章的主要内容并强调说：

“分布理论的简单介绍将说明海维赛德在其符号运算法则中使用的一些大胆方法(狄拉克函数、这样的函数的积分和微分)是完全有理由的。”

另外，施瓦兹在文章的引言中指出这篇文章是其 1945 年和 1947 年发表在《格勒诺布尔大学学报》上那两篇文章的一个摘要，并且再次指出分布理论解释了海维赛德符号运算法则的合理性(见图 5.22)。这就再次表明施瓦兹引入分布理论的目的之一是为了给海维赛德符号运算法则进行严格的数学解释，同时也体现出这篇文章是一篇关于分布理论的解说性文章。

Cet article expose brièvement une théorie des « distributions », qui a été développée dans ses grandes lignes à une Conférence faite à la Société des Radio-électriciens, le 4 décembre 1946. Un résumé de la théorie a déjà paru sous forme d'un article dans les *Annales de l'Université de Grenoble* (1945) ; un autre paraîtra prochainement dans les mêmes *Annales* (1947). La théorie complète sera exposée

图 5.22　施瓦兹对 1948 年这篇文章的内容的表述

有鉴于此，我们在这里仅考察施瓦兹在这篇文章中做出的分布拉普拉斯工作。首先，他记函数 $f(x)$ 的拉普拉斯像为 $F(p)$，并记 $f(x)]F(p)$，其中 $F(p)=\int_0^{+\infty}\exp(-px)f(x)\mathrm{d}x=f(\exp(-px))$。然后他用字母 u 表示分布，用 U 表示其像，把函数的拉普拉斯变换推广到分布上，即 $u]U(p)$，其中 $U(p)=u(\exp(-px))$。因此，$\delta'=[\exp(-px)]=p$，从而有 $\delta']p$。这样施瓦兹就从数学角度说明了狄拉克函数一阶导数的拉普拉斯变换为 p。

接着，他给出了三个分布拉普拉斯变换的重要性质：

(1) 若 $u]U(p)$，则 $u']pU(p)$；

(2) 若 $u]U(p)$，则 $xu]-U'(p)$；

(3) 若 $u]U(p)$，$v]U(p)$，则 $u*v]U(p)V(p)$。

随后，施瓦兹用一个简单例子来说明分布拉普拉斯变换的实用性：求解积

分方程$\int_0^x \cos(x-t)f(t)\mathrm{d}t = A(x)$，其中$A(x)$已知，求$f(t)$。

他假设可以找到该方程的一个分布解T，T在$x<0$时取值为零，从而把上述待求解方程推广为方程$Y\cos x * T = A$，其中A为已知分布，且在$x<0$时取值为零。对于方程$Y\cos x * T = A$，施瓦兹先求其基本解，即当$A=\delta$时，求解方程$Y\cos x * e = \delta$。由于$Y\cos x]\dfrac{p}{p^2+1}$，$e]E(p)$，$\delta]1$，因而方程$Y\cos x * e = \delta$在实施拉普拉斯变换之后便成为乘积方程$E(p)\dfrac{p}{p^2+1}=1$。因而可得$E(p)=\dfrac{p^2+1}{p}=p+\dfrac{1}{p}$，随后施瓦兹指出$e=\delta'+Y$。

这样施瓦兹就通过拉普拉斯变换得到了方程$Y\cos x * T = A$的基本解e，再让该方程两边同时与e做卷积便得$(Y\cos x * T)*e = T*(Y\cos x * e) = T = A*e$，由此得到方程$Y\cos x * T = A$的一个解$T = A*e = A*(\delta'+Y) = A' + A*Y$。特别地，若$A$为函数$f(x)$，则有$T = A' + Y\int_0^x A(t)\mathrm{d}t$。这样，施瓦兹就通过拉普拉斯变换对该积分方程进行了求解。值得注意的是，施瓦兹在此这样强调分布的价值：

“虽然在不使用分布的情况下，这一积分方程的求解问题并不会给电子工程师们带来困难（我故意选择了一个简单的例子），但是系统地使用分布将会给他们的研究工作带来更多的方便，并且使他们的研究工作更不容易出错。”

诚然，由前面几个章节的论述我们可知：虽然索伯列夫和施瓦兹均独立地引入了广义函数的泛函定义，但是基于他们引入这一概念的目的不同，故而他们引入了不同的测试函数空间及泛函空间。再者，不同的数学传统及时代背景使施瓦兹和索伯列夫在引入广义函数概念之后做出了不同的科研成果。施瓦兹在分布概念的基础上，在布尔巴基学派的熏陶下，研究了分布空间的序结构、拓扑结构以及代数结构；在求解卷积方程的驱动下，在布尔巴基学派“代数化”观念的启发下，考察了卷积运算这一代数结构以及分布的傅里叶变换，建立了分布理论。索伯列夫在圣彼得堡数学学派的历练下，在第二次世界大战导致的军事需要的驱使下，在运用其引入的广义函数概念及相关运算解决了双曲型偏微分方程解的存在性和唯一性之后，继续为求解微分方程而发展了索伯列夫空间及其嵌入定理。也就是说，不同的科研兴趣与目的、时代背景和数学环境共

同导致虽然索伯列夫先于施瓦兹引入了广义函数的泛函定义，但是却给施瓦兹留下了独立创建广义函数理论的机会。

事实上，索伯列夫在广义函数方面的影响没有施瓦兹大的原因还在于以下两个方面。一是文章和著作的语言问题。除了 1936 年的文章用法语发表之外，索伯列夫几乎所有与偏微分方程的解和广义函数有关的文章都是用俄语发表的，1950 年出版的《泛函分析在数学物理中的应用》一书亦是如此，该书在十多年之后才相继被译成英语和德语。二是索伯列夫没有立刻把他的系列文章整理、编著成书。索伯列夫的广义函数工作发表在他 1934～1936 年的文章中，可他那本《泛函分析在数学物理中的应用》却是在十多年以后出版的，而且还是俄文版。与索伯列夫不同，施瓦兹在 1944～1949 年发表了一系列关于广义函数的研究论文，随后便在 1950～1951 年先后出版了两卷本的《分布理论》。

第 6 章　广义函数理论的应用与发展

在近现代物理学和数学自身发展的背景下，施瓦兹创建了他的广义函数理论。反之，这一理论的建立又促进了物理学和数学的发展。这一章对广义函数理论的应用及其发展做一简要介绍，主要探讨它对线性偏微分方程理论发展的影响。

6.1　广义函数理论的应用

随着广义函数理论的建立与完善，它被日益广泛地应用于物理学和数学的研究之中，越来越成为物理学家、数学家和工程师们进行科学研究的工具。一方面，广义函数理论促进了数学科学自身的发展，如偏微分方程、积分方程、差分方程、调和分析、李群表示论及概率论等。另一方面，它加快了理论物理学发展的脚步，如量子场理论。

6.1.1　对线性偏微分方程的影响

在当今，施瓦兹的广义函数理论对线性偏微分方程理论的影响已是公认的事实，它为线性偏微分算子理论的发展提供了好的研究基础。可以毫不夸张地说，马尔格朗日、埃伦普里斯和赫尔曼德尔等数学家的相关工作使线性偏微分方程理论在 20 世纪 50 年代获得了大进展，取得了重大变革。这一重大突破又为偏微分算子理论的进一步发展奠定了基础，使得在 60 年代以后出现了拟微分算子理论、傅里叶积分算子理论和微局部分析等众多研究成果。

偏微分方程理论在 20 世纪 40 年代产生的显著成果引起了施瓦兹的浓厚兴趣，他预计并坚信其创建的广义函数理论将在一般偏微分方程理论的发展中扮演重要角色。诚然，施瓦兹的这一观点已被日后的发展所证实。马尔格朗日 1955 年的博士论文“偏微分方程和卷积方程解的存在及近似”和赫尔曼德尔(见图 6.1)

1963 年关于线性偏微分方程的专题著作《线性偏微分算子》就是很好的见证[①]。马尔格朗日在他的博士论文中系统使用了其导师的分布和记号[②]，并且致力于一般卷积方程的研究。在赫尔曼德尔的这部综述性专题著作中，施瓦兹的广义函数理论则是他进行微分算子研究的理论基础，他在第一部分便介绍了广义函数理论，随后则顺理成章地运用广义函数理论来研究常系数偏微分算子和变系数偏微分算子。也就是说，赫尔曼德尔在这部著作中以施瓦兹的广义函数理论为工具，系统考察了线性偏微分方程解的结构、各种边值问题解的存在性、唯一性和正则性。

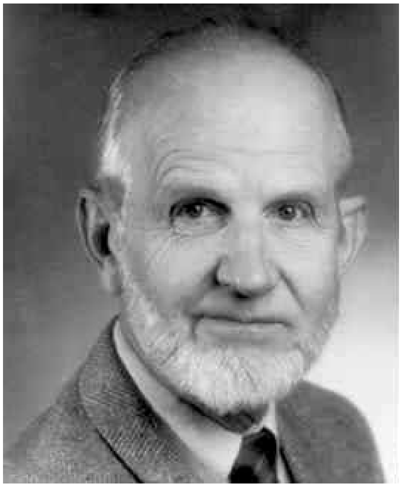


图 6.1　赫尔曼德尔（L. Hörmander，1931—2012）

事实上，施瓦兹在创建广义函数理论的过程中已经提出了一些与偏微分方程有关的重要问题。例如，对于解的存在性问题，任意常系数线性偏微分算子 $P(D)=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m} a_\alpha D^\alpha u$ 是否一定存在基本解？对微分方程解的正则性问题，亚椭圆偏微分算子[③]该如何来刻画？再者，由于利用傅里叶变换可以把常系数线性偏微分方程 $Lu=f$ 转化成代数方程 $P(\xi)(Fu)=Ff$，其中 $P(\xi)=\sum a_\alpha (i)^{|\alpha|}\xi^\alpha$；因此，

① 此著作已有中译本：L. 赫尔曼德尔著. 线性偏微分算子[M]. 陈庆益译. 北京：科学出版社，1980.

② 施瓦兹是马尔格朗日的导师。

③ 区域 Ω 上的偏微分算子 $P(D)$ 为亚椭圆型的是指：对 Ω 的每个开子集 U 和 Ω 内的每个分布 T，如果 PT 是 U 上的无穷可导函数，那么 T 亦为 U 上的无穷可导函数。也就是说，如果偏微分算子 $P(D)$ 是亚椭圆的，那么对 U 上的任意无穷可导函数 f，微分方程 $Pu=f$ 的所有解均无穷可导。

微分方程的求解就转换为代数方程的求解，从而产生了用多项式除分布的问题。

微分算子的基本解是偏微分方程理论的重要概念之一。如果微分算子 $P(D)$ 的基本解 E 存在，且卷积 $E*f$ 有意义，则 $u=E*f$ 就是微分方程 $P(D)u=f$ 的一个解。另一方面，基本解 E 在 $R^n\setminus\{0\}$ 上是无穷可导函数这一条件是微分算子 $P(D)$ 为亚椭圆型的充分必要条件。也就是说，利用微分算子的基本解不仅可以得到非齐次微分方程的一个解，回答微分方程解的存在性问题；而且可以借助它来刻画某些偏微分算子，进而可以用它来了解有关微分方程解的正则性和奇性分布的情况。

施瓦兹在分布概念基础上给出了微分算子基本解的确切定义，这就为以微分算子的基本解为切入点来讨论偏微分方程的基本问题提供了必要的前提条件，如解的存在性、正则性、甚至是奇异性。事实上，在施瓦兹之前已经有一些数学家针对某些具体的微分算子求出了基本解。例如，比利时数学家加尼尔(H. G. Garnir，1921—1985)就在 1951 年计算出了许多不同类型常系数偏微分方程的基本解。

对于常系数线性偏微分算子基本解的一般研究，则首先由施瓦兹提出了任意常系数偏微分算子存在基本解的大胆猜想，随后其学生马尔格朗日(见图 6.2)和埃伦普里斯几乎同时在 1955 年独立地证明了这一论断。从时间上容易看出施瓦兹的这个猜想几乎同时被马尔格朗日和埃伦普里斯所证明，事实上这一猜想的证明还使施瓦兹处于尴尬之地。对此，施瓦兹有过这样的诉说：

“埃伦普里斯使我陷入尴尬境地。马尔格朗日与埃伦普里斯在相近的课题上均工作了许多年，都发表过相关文章，也都在准备自己的毕业论文。我经常与马尔格朗日一起工作，但同时也与埃伦普里斯一起研究，这是因为埃伦普里斯定期地递给我他的研究思路及计划。我把埃伦普里斯信件的内容告诉马尔格朗日是对的吗？我几乎不能比较这两个正在准备他们各自博士毕业论文的学生，有时是马尔格朗日取得了更深入的一步，有时又是埃伦普里斯，我不能对此保持平衡。”

这段话很好解释了为什么现在常常把这一定理称为马尔格朗日-埃伦普里斯定理。关于任意常系数微分算子 $P(D)$ 存在基本解的证明，马尔格朗日采用了泛函分析的一个特征用法。

图 6.2　马尔格朗日(B. Malgrange，1928—)

首先，马尔格朗日证明了不等式

$$\left|f(0)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|P(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})\right|\mathrm{d}\theta \tag{6.1}$$

其中 $P(t)=P(t_1,t_2,\cdots,t_n)=t_1^m+\cdots$ 是一个 m 次多项式，$f(t)$ 在单位圆内解析。然后，如果 $P(t)=P(t_1,t_2,\cdots,t_n)=t_1^m+\cdots$ 是一个 m 次多元多项式，$F(t)$ 是测试函数 $\phi(x)$ 的傅里叶变换，那么由不等式(6.1)可得不等式

$$\left|F(t)\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|(PF)(t_1+\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},t_2,\cdots,t_n)\right|\mathrm{d}\theta$$

据此，他证明了 $\left|\phi(0)\right| \leqslant \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{R^n}\left|F(t)\right|\mathrm{d}t \leqslant \rho(P\phi)$，其中 $P=P(D)$，ρ 是 $P(D)C_0^\infty$ 上的某个容许范数。最后，根据哈恩-巴拿赫定理，他把线性映射 $P\phi \to \phi(0)$ 推广到分布 T 上，使得 $\phi(0)=T(P\phi)$，即 $P'T=\delta(x)$，从而 T 为伴随算子 P' 的一个基本解。

几年之后，赫尔曼德尔在其 1958 年的文章“用多项式除分布”中进一步证明了任意常系数偏微分方程存在缓增的基本解。他的证明思路大致如下。首先，赫尔曼德尔解答了以多项式为分母的分布除法问题。对此，他在其 1958 年的文章中这样写道：

“定理 1　若 P 是一个不恒为零的多项式，则乘法映射 $f \in S \to Pf \in S$ 有一个连续逆映射。

……

现在我们将表明，借助定理 1 能够很容易地研究除法问题。

定理 3　设 T 是一个缓增分布，P 是一个不恒等于零的多项式，则存在一个缓增分布 S，使得 $T = PS$。

定理 4　设 T 是开集 Ω 中的一个分布，则存在 Ω 中的分布 S，使得 $T = PS$，其中 P 是不恒等于零的给定多项式。”

然后，他在上述分布除法工作的基础上，借助分布的傅里叶变换证明了下述定理：

若 $P(D)$ 是一个常系数偏微分算子，T 是一个缓增分布，则存在缓增分布 S，使得 $P(D)S = T$。

诚然，这个定理表明任意常系数偏微分算子存在一个缓增分布解。特别地，它存在缓增基本解（见图 6.3）。

Theorem 5. *If $P(D)$ is a partial differential operator with constant coefficients and T a tempered distribution, there is a tempered distribution S such that*

$$P(D)S = T. \tag{5.1}$$

Proof. Applying the Fourier transformation in the sense of Schwartz [4], we transform (5.1) into the equation

$$P(-i\xi)\hat{S} = \hat{T},$$

where $\hat{S}$ and $\hat{T}$ are the Fourier transforms of S and T. Now this equation has a tempered solution $\hat{S}$, hence inverting the Fourier transformation we obtain a solution of (5.1). The proof is complete.

图 6.3　赫尔曼德尔关于常系数偏微分算子存在缓增基本解的证明

至此之后，还有一些数学家用不同的方法再次证明了马尔格朗日-埃伦普里斯定理。例如，数学家奥特纳（N. Ortner，1945—）和瓦格纳（P. Wagner，1956—）在 1994 年发表了文章“马尔格朗日-埃伦普里斯定理的简短证明”。不久之后，他们又在文章“关于线性偏微分算子基本解的明确表示公式”中给出了该定理的构造性证明。瓦格纳还在 2009 年发表的文章“马尔格朗日-埃伦普里斯定理的一个新构造性证明”中给出了该定理的又一新证明。

微分算子的另一个基本问题是解的正则性问题。苏联数学家彼得罗夫斯基（见图 6.4）是第一个得到正则性相关成果的数学家，他曾证明常系数微分方程的解可解析的充分必要条件是该微分方程是椭圆型方程。也就是说，对常系数线性偏微分方程

$$Pu=\sum_{|\alpha|\leqslant m}a_\alpha D^\alpha u=0$$

其解 u 解析的充分必要条件是对任意不等于零的实向量 ξ，有 $P_m(\xi)\neq 0$。

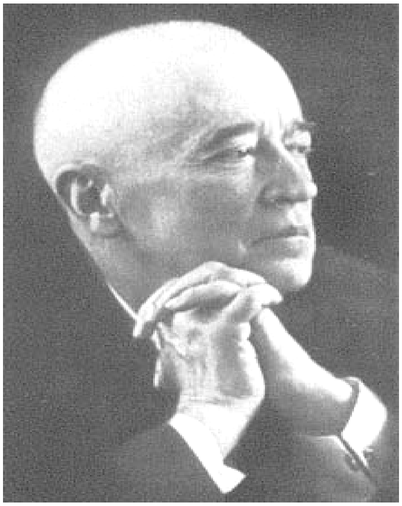


图 6.4　彼得罗夫斯基（I. G. Petrovskii，1901—1973）

这就是现在所称的椭圆型算子，拉普拉斯算子是最简单的一个例子。后来，赫尔曼德尔发展了彼得罗夫斯基的结果。他在其 1955 年的博士论文“一般偏微分算子理论”中得到了相当重要的一般性结果：一般偏微分方程解无穷可导的简单条件是次椭圆性条件。

对于常系数线性偏微分方程，由马尔格朗日-埃伦普里斯定理可知它必定存在一个解。然而对于变系数线性偏微分方程，波兰数学家卢伊（H. Lewy，1904—1988）（见图 6.5）在 1957 年发表了一篇仅四页长的文章“光滑线性偏微分方程无解的例子”（见图 6.6）。文中给出了一个出人意料的反例，即变系数线性偏微分方程

$$\left[-\frac{\partial}{\partial x_1}-i\frac{\partial}{\partial x_2}+2i(x_1+ix_2)\frac{\partial}{\partial y_1}\right]u=F(x_1,x_2,y_1)$$

不存在任何解，即便是分布解也不存在。这里方程的系数是解析的，非齐次项 $F(x_1, x_2, y_1)$ 是无穷可导函数。

图 6.5　卢伊（H. Lewy，1904—1988）

Annals of Mathematics

An Example of a Smooth Linear Partial Differential Equation Without Solution
Author(s): Hans Lewy
Source: *Annals of Mathematics*, Second Series, Vol. 66, No. 1 (Jul., 1957), pp. 155-158
Published by: Annals of Mathematics
Stable URL: http://www.jstor.org/stable/1970121
Accessed: 21/04/2014 11:13

Your use of the JSTOR archive indicates your acceptance of the Terms & Conditions of Use, available at http://www.jstor.org/page/info/about/policies/terms.jsp

JSTOR is a not-for-profit service that helps scholars, researchers, and students discover, use, and build upon a wide range of content in a trusted digital archive. We use information technology and tools to increase productivity and facilitate new forms of scholarship. For more information about JSTOR, please contact support@jstor.org.

http://www.jstor.org

图 6.6　卢伊于 1957 年完成的文章

这篇文章破灭了数学家试图证明任意变系数线性偏微分算方程存在解的想法，从而转向去探讨方程有解的条件。赫尔曼德尔在对卢伊的反例做出进一步分析之后发现，变系数线性偏微分方程解存在与否的关键在于该微分算子与它取共轭系数算子的交换子 $\bar{p}(x,D)p(x,D)-p(x,D)\bar{p}(x,D)$ 的性质。

在系统总结了常系数线性偏微分算子理论之后，赫尔曼德尔对变系数线性偏微分算子进行了深入细致的研究，得到了变系数线性偏微分方程解存在的条件，以及解的唯一性和正则性的相关结果，并因此于 1962 年获得菲尔兹奖。他指出卢伊的反例之所以没有解，是因为它不满足解存在的条件。

6.1.2　其他应用

除了在偏微分方程中的应用之外，分布理论在与微分方程理论相关的积分方程论、差分方程论中也有重要应用。例如，在盖尔方特（I. M. Gel’fand，1913—2009）和希洛夫（G. E. Shilov，1917—1975）合著的五卷本《广义函数》系列丛书的第三卷中，他们探究了广义函数在微分方程理论中的应用。在这一卷中，他们主要考察了广义函数理论在偏微分方程柯西问题解的唯一性和适定性方面的

应用，研究了依微分算子的特征函数展开理论[①]。

再者，分布理论是解决数学其他分支领域，如调和分析、局部致密李群表示理论、多复变函数理论以及概率论等中的一些问题的有效工具。盖尔方特在其《广义函数》系列丛书的第四卷中研讨了广义函数在李群表示论和概率论中的应用[②]。

另外，分布理论是处理一些现代物理学问题的有力工具，尤其是对于量子力学问题。由于场算子具有高度的奇异性，因而它在量子场理论中尤显重要。

6.2　广义函数理论的发展

通过前面章节易知，基于索伯列夫和施瓦兹引进广义函数概念的灵感源泉不同，因而他们各自的广义函数概念与名称略有不同。但是，他们的广义函数概念在本质上是相同的，这是因为他们都把广义函数看成某类性质良好的基本函数空间上的连续线性泛函。也就是说，索伯列夫和施瓦兹的广义函数概念均建立在泛函思想的基础上。泛函分析的介入，使广义函数理论较为抽象和难于理解。

为了尽可能简单地表述广义函数，使之更容易被物理学家及工程师们所掌握和应用，一些数学家借助施瓦兹分布理论的两个基本定理，利用抽象的方法，以初等且更简单的方式引入了广义函数的其他定义。再者，施瓦兹在出版《分布理论》之后，他和一些数学家进一步发展了这一理论。

6.2.1　广义函数的基本函数序列定义

在考察其他类型的广义函数定义之前，有必要先对即将提到的“分布的两个基本定理”和“抽象方法”进行解释说明，这将有助于理解为什么下述几位数学家要以那样的方式引入广义函数，以及他们引入这些广义函数概念的合理性。实数是有理数的推广，数学家引入实数的动因在于处理一些运算，如开方

① 盖尔方特的《广义函数》的第三卷有中译本：I. M. 盖尔方特，G. E. 希洛夫著. 广义函数III[M]. 周宝熙译. 北京：科学出版社，1983.

② 盖尔方特的《广义函数》的第四卷有中译本：I. M. 盖尔方特，N.Ya. 维连金著. 广义函数Ⅳ[M]. 夏道行译. 北京：科学出版社，1965.

和对数运算。实数的第一个严格定义是魏尔斯特拉斯于 1857 年在其解析函数论的课程中给出的，即首先借助自然数定义了正的有理数，再通过无数多有理数集合来定义实数。

现在一般使用的实数构造法是戴德金和俄国数学家康托尔在 1872 年分别独自提出的。康托尔的思想是把实数定义为有理数的基本序列[①]，他把每个有理数基本序列与一个实数等同起来。也就是说，康托尔把实数集定义为所有有理数基本序列的等价类构成的集合。由此可见，在康托尔的定义中，他以有理数为出发点来定义实数。

广义函数是古典函数概念的推广，数学家引入广义函数的基本动因是为了解决求导运算问题。这是因为经典函数，或是连续函数不一定可导。与康托尔定义实数的思想类似，一些数学家以连续函数为出发点来定义广义函数。这是因为“分布作为连续函数序列的极限”与“分布在局部上是连续函数的导数”，是施瓦兹分布理论的两个基本定理。由此便不难理解，这些数学家为什么要以连续函数为出发点来构造广义函数。

数学家在引入新概念时经常采用抽象方法，即对具有某些共同特性的数学对象进行同一化。例如，康托尔就是通过把等价的基本有理数序列[②]同一化而提出实数概念的。借助等价概念，康托尔把所有有理数的基本序列构成的集合划分成不相交的类，同一类中的有理数基本序列是等价的，不同类中的有理数基本序列是不等价的。由此，每个实数就是一类相互等价的有理数基本序列。

由于任意分布是连续函数序列的极限，因而函数序列就为数学家或是物理学家提供了另一种不同于施瓦兹定义广义函数的方法。通过该方法定义广义函数的数学家和物理学家声称，他们的广义函数定义要比广义函数的泛函定义更接近于物理直观。下面将看到这一方法与康托尔定义实数的方法极其相似，都是通过基本序列来引入新的数学概念的。因此，不同的基本序列定义将产生不同的广义函数序列定义。

连续函数的基本序列定义主要有两种，其中之一是借助测试函数 $\varphi \in C_c^\infty$ 来定义。在施瓦兹分布理论工作的基础之上，波兰数学家米库辛斯基（J. Mikusinski,

① 这里基本序列是指有理数序列 $\{a_n\}$ 满足柯西收敛准则，即当 n 趋向于无穷时，对任意整数 v，序列 $\{a_{n+v}-a_n\}$ 一致收敛于零。

② 有理数基本序列 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 等价是指当 n 趋向于无穷时，序列 $\{a_n-b_n\}$ 亦趋向于零。

1913—1987）在其 1948 年的文章“洛朗 • 施瓦兹的推广方法和弱收敛”中，法国数学家莱特希尔（M. J. Lighthill，1924—1998）在其 1958 年的著作《傅里叶分析和广义函数简介》中，均以这种方式给出了广义函数的基本序列定义。

定义 1：对 R^n 上的连续函数序列 $\{f_n(x)\}$，若对所有支集为紧的无穷可导函数 $\varphi(x)$，极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^n} f_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称序列 $\{f_n(x)\}$ 是基本连续函数序列。

定义 2：对两个基本连续函数序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$，若对所有支集为紧的无穷可导函数 $\varphi(x)$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^n} f_n\varphi = \lim\limits_{n\to\infty}\int_{R^n} g_n\varphi$，则称基本连续函数序列 $\{f_n\}$ 和 $\{g_n\}$ 等价。

由此，所有基本连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 就被划分成没有公共元素的等价类，当且仅当两个基本连续函数序列等价之时，它们才属于同一类。因此，广义函数就被定义为基本连续函数序列 $\{f_n\}$ 的等价类。也就是说，对等价的基本连续函数序列进行同一化便得到了广义函数的序列定义。诚然，这一定义中运用到了测试函数 φ，因而该定义最为接近施瓦兹的分布概念。

1957 年，米库辛斯基和西科尔斯基（R. Sikorski，1920—1983）出版了他们合著的《广义函数的基本理论》①。在这本著作中，他们给出了另一种定义连续函数基本序列的方法。

定义 1：对连续函数序列 $\{f_n(x)\}$，如果对 R 的每个紧子集 K，存在某个连续函数序列 $\{F_n(x)\}$ 和自然数 k，使得

(1) $F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$，其中 $x \in K$；

(2) 序列 $\{F_n(x)\}$ 在紧子集 K 上一致收敛。

那么称连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 是基本序列。

定义 2：对两个基本连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$，如果对 R 的所有紧子集 K，存在序列 $\{F_n(x)\}$ 和 $\{G_n(x)\}$，以及自然数 k，使得

(1) 对相同的 k，$F_n^{(k)}(x) = f_n(x)$，$G_n^{(k)}(x) = g_n(x)$；

(2) $F_n(x) = G_n(x)$。

那么称基本连续函数序列 $\{f_n(x)\}$ 和 $\{g_n(x)\}$ 是等价的。

---

① 米库辛斯基和西科尔斯基的著作有中译本：J. 米库辛斯基，R. 西科尔斯基著. 广义函数的基本理论[M]. 复旦大学数学系 1956～1961 级泛函分析组同学译. 北京：人民教育出版社，1960.

据此，数学家便得到另一种广义函数的序列定义。值得注意的是，科雷瓦(J. Korevaar)也得到了广义函数的这种定义，这一结果发表在他 1955 年的文章“从应用数学角度定义的分布”中。

6.2.2　由形式导数定义的广义函数

在局部上，即在 R^n 的每个紧子集上，任意分布是一个连续函数的导数这一论断是施瓦兹分布理论的基本观点之一。再者，施瓦兹的任意分布 $T \in D'(R^n)$ 能够被表示成局部有限和，即 $T = \sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=0}^{\infty}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n} f_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$，其中 $f_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$ 是连续函数。这一事实产生了广义函数的下述定义，Tolhoek 在他 1949 年的文章“使用狄拉克的 δ 函数和其他反常函数的数学证明及其应用”中以局部有限配对和 $\sum_k(\Omega_k, f_k)$ 为出发点，引入了另一种广义函数的定义。

定义：对两个配对 $\sum_k(\Omega_k, f_k)$ 和 $\sum_k(\Phi_k, g_k)$，其中 Ω_k 和 Φ_k 是微分算子，f_k 和 g_k 是连续函数。若对所有测试函数 $\varphi \in C_{\mathrm{comp}}^{\infty}(R^n)$，积分 $\int_{R^n}\left(\sum_k \Omega_k f_k\right)\cdot\varphi$ 和 $\int_{R^n}\left(\sum_k \Phi_k g_k\right)\cdot\varphi$ 在被施予形式分部积分法之后的值相等，则称这两个配对等价。

因此，所有配对和 $\sum_k(\Omega_k, f_k)$ 的集就被划分成没有公共元素的等价类，当且仅当两个配对等价时它们才属于同一类。据此，广义函数又可以被定义为局部有限配对和的等价类。在广义函数的这个定义中，数学家通过对等价的配对进行同一化而得到广义函数的另一定义。波兰数学家柯朗在他与希尔伯特合著的《数学物理方法Ⅱ》中也给出了广义函数的这一定义①。

1953 年，数学家考尼格(H. König)发表了文章——“施瓦兹‘分布’理论新解”。在这篇文章中，他以幂级数的形式展开为切入点引进了广义函数的另一新定义。

① 柯朗和希尔伯特合著的《数学物理方法Ⅱ》有中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特著. 数学物理方法Ⅱ[M]. 熊振翔，杨应辰译. 北京：科学出版社，2012.

定义：对两个局部有限幂级数

$$\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=0}^{\infty} f_{p_1,p_2,\cdots,p_n} Z_1^{p_1}\cdots Z_n^{p_n} \text{ 和 } \sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=0}^{\infty} g_{p_1,p_2,\cdots,p_n} Z_1^{p_1}\cdots Z_n^{p_n}$$

其中 $f_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$ 和 $g_{p_1,p_2,\cdots,p_n}$ 是连续函数。若这两个幂级数的逐次差是形如 $f(x)Z_1^{p_1}\cdots\ Z_n^{p_n}-g(x)Z_1^{p_1}\cdots Z_n^{p_n}$ 的和，其中 $f(x)=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_v}\right)g$，则称这两个幂级数等价。

因此，广义函数又可以被定义成局部有限幂级数的等价类。值得注意的是，把幂级数 $\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n=0}^{\infty} f_{p_1,p_2,\cdots,p_n} Z_1^{p_1}\cdots Z_n^{p_n}$ 转换成泛函

$$T(\varphi)=\sum_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(-1)^{p_1+\cdots+p_n}\int_{R^n} f_{p_1,p_2,\cdots,p_n}(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}\varphi(x)\mathrm{d}x$$

的映射是这里的广义函数概念与施瓦兹的广义函数定义之间的同构映射。

除了上述几种用等价类思想来引入广义函数之外，还有一些数学家提出了广义函数的其他定义。例如，奥地利数学家克特(G. Köthe，1905—1989)在 1953 年发表了文章“解析函数的边缘分布”。在这篇文章中，他把广义函数视为解析函数的边值问题。20 世纪 50 年代末，日本数学家佐藤干夫(M. Sato，1928—)发表了文章“超函数理论”，建立了超函数理论，从而把广义函数视为超函数的特殊情形。

6.2.3　分布理论的发展

1950—1951 年，施瓦兹出版了两卷本《分布理论》，这标志着分布理论的建立。在这部经典著作出版之后，施瓦兹和一些数学家对这一理论进行了发展与完善。

首先是施瓦兹“核定理”。核是与算子相关的两个变量的分布，核定理的证明是施瓦兹在《分布理论》出版之后取得的第一个关于分布的显著成果，这是在狄拉克的激励下取得的成功。与核定理工作相关联，施瓦兹把分布推广到向量值分布。他应用分布来研究量子力学中的基本粒子理论，并且推广了拉东测度理论。

除此之外，施瓦兹细致研究了分布的拉普拉斯变换，这集中体现在他 1952 年的文章“分布的拉普拉斯变换”中。在施瓦兹引入分布概念之前，电气工程师们正是在拉普拉斯变换中使用了这个未被数学家解释清楚的概念，其中的 $\delta, \delta', \delta''$ 就是那些拉普拉斯变换等于 $1, p, p^2$ 的事物。这表明分布的拉普拉斯变换在物理学中有着重要应用，也使施瓦兹认为有必要对分布的拉普拉斯变换理论进行系统考察。

从前面考察施瓦兹的广义函数理论工作及其这一理论的成因章节中不难看出，施瓦兹的分布理论中还存在着一些有待解决的问题，如分布的乘法和除法。对于分布的乘法，施瓦兹在出版了两卷本《分布理论》著作之后，在 1954 年发表文章“分布乘法的不可能性”。在这篇文章中，他论证分布之间一般不能进行乘法运算，甚至是在异于分布理论的任何理论之中，只要前提是数学对象总能够进行求导运算且存在元素 δ，那么就一定无法进行乘法运算。

考尼格也对分布的乘法进行了研究。他的这一研究工作体现在其 1955 年的文章“分布的乘法”中，作者在文中给出了一种与施瓦兹的乘法定义完全不同的乘法。另外，我国数学家李邦河于 1978 年在《中国科学》杂志上发表了两篇题为“非标准分析与广义函数的乘法”（Ⅰ和Ⅱ）的文章，文中首次借助非标准分析法解决了广义函数的乘法问题。

运用傅里叶变换求解卷积方程这一思路自然地导致数学家研究分布的除法问题。赫尔曼德尔在其 1958 年的文章“以多项式为分母的分布除法”中解答了如何以多项式为分母做除法。另外，洛雅希维奇考察了如何以解析函数为分母做除法，他的这一方法后来被用以研究解析流形的结构。值得注意的是，分布除法问题的解答激发了马尔格朗日证明了一些超定偏微分方程组的重要定理。随后，他还获得了微分拓扑中的一些显著结果，尤其是证明了所谓的预备定理。

在施瓦兹《分布理论》出版之后，一些数学家发展了与施瓦兹分布理论平行或推广的广义函数工作。例如，佐藤干夫在 20 世纪 50 年代末运用上同调方法引进的超函数，它是对分布的重要推广；马蒂诺（A. Martineau，1930—1972）的解析泛函，以及鲁米厄（C. Roumieu）的广义广义函数（“广义广义”指广义函数的推广）。

盖尔方特和希洛夫对施瓦兹的分布理论进行了发展与完善。他们在 20 世纪 50 年代末出版的五卷本《广义函数》系统地研究了广义函数理论，介绍了广义

函数的丰富性质及其在数学其他分支领域中的应用，如偏微分方程理论。这套丛书第一卷主要考察广义函数的基本理论以及在分析学中的一些应用；第二卷是对第一卷的补充与完善，不仅论证了第一卷中没有证明的定理，而且引进并考察了大量具体的广义函数空间；第三、四卷分别探究广义函数在微分方程理论、李群表示论和概率论中的应用；第五卷则是关于广义函数理论之中复变函数理论方法的进一步发展。另外，盖尔方特和希洛夫还建立了急增函数的傅里叶变换理论，从而扩大了广义函数的应用范围。

参 考 文 献

[1] Atiyah, A. Bourbaki, a Secret Society of Mathematicians and the Artist and the Mathematician[J]. Notices of the AMS, 54(9), 2007:1150-1152.

[2] Bakhvalov, N. S., Vladimirov, V. S., Gonchar, A. A. Sergei L'vovich Sobolev(on His Eightieth Birthday)[J]. Uspekhi Mat. Nauk, 1988, (43)5:3-16.

[3] Bôcher, M. On Harmonic Functions in Two Dimensions[J]. Proceedings of the American Academy of Arts and Sciences, 1906, 41(26):577-583.

[4] Bochner, S. Darstellung Reelvariabler und Analytischer Funktionen Durch Verallgemeinerte Fourier-und Laplace-Integrale[J]. Math. Ann., 1927, 97:635-662.

[5] Bochner, S. Vorlesungen über Fouriersche Integrale[M]. Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft, 1932.

[6] Boole, G. A Treatise on Differential Equations[M]. London: Macmillan, 1877.

[7] Borel, A. Twenty-Five Years with Nicolas Bourbaki, 1949-1973[J]. Notices of the AMS, 45(3), 1998:372-380.

[8] Bourbaki, N. Sur Certains Espaces Vectoriels Topologiques[J]. Ann. Inst. Fourier, 1950, 2:5-16.

[9] Bourbaki, N. The Architecture of Mathematics[J]. American Mathematical Monthly, 1950, 57(4):221-232.

[10] Calkin, J.W. Functions of Several Variables and Absolute Continuity, I[J]. Duke Mathematical Journal, 1940, 6:170-185.

[11] Chandrasekharan, K. The Autobiography of Laurent Schwartz[J]. Notices of the AMS, 1998, 45(9):1141-1147.

[12] Choquet, G., Deny, J. Sur Quelques Propriétés de Moyenne Caractéristiques des Fonctions Harmoniques et Polyharmoniques[J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1944, 72:118-140.

[13] Соболев, С. Л. The Wave Equation in a Heterogeneous Isotropic Environment[R]. Kharkov: USSR, 1930.

[14] Соболев, С. Л. Generalized Solutions of the Wave Equation[R]. Leningrad: USSR, 1934.

[15] Соболев, С. Л. Le Problem de Cauchy dans L’espace des Fonctionelles[J]. Doli. Acad. Sci. URSS, 1935, 7(3):291-294.

[16] Соболев, С. Л. Méthode Nouvelle à Résoudre le Problème de Cauchy pour lès Equations Linéaires Hyperboliques Normales[J]. Matematiceskij Sbornik, 1936, 43(1):39-72.

[17] Соболев, С. Л. Sur un Theorem de L’analyse Fonctionelle[J]. Matematicheski Sbornik, 1938, 46(4):471-497.

[18] Courant, R., Hilbert, D. Methods of Mathematical Physics, II [M]. New York: Interscience Publishers, 1962.（中译本：R. 柯朗，D. 希尔伯特著. 数学物理方法 II [M]. 熊振翔，杨应辰译. 北京：科学出版社，2012.）

[19] Delsarte, J. F. Compte Rendu de la Réunion Bourbaki du 14 Janvier 1935[J]. Gaz. Math. , 84, 2000:16-18.

[20] Dieudonné, J. La Dualité dans les Espaces Vectoriels Topologiques[J]. Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 1942, 59:107-139.

[21] Dieudonné, J., Schwartz, L. La Dualité dans les Espaces（F）et（LF）[J]. Annales de L'institut Fourier, 1949, 1:61-101.

[22] Dieudonné, J. History of Functional Analysis[M]. New York: North-Holland, 1981.

[23] Dirac, P. A. M. The Physical Interpretation of the Quantum Dynamics[J]. Part Proceedings of the Royal Society of London, 1927, 113:621-641.

[24] Dirac, P. A. M. The Principles of Quantum Mechanics (Fourth Edition) [M]. Oxford: Clarendon Press, 1958.

[25] Ehrenpreis, L. Solution of Some Problems of Division: Part I. Division by a Polynomial of Derivation[J]. American Journal of Mathematics, 1954, 76(4):883-903.

[26] Ehrenpreis, L. The Division Problem for Distributions[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41: 756-758.

[27] Ehrenpreis, L. Completely Inversible Operators[J]. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41: 945-946.

[28] Evans, G. C. On the Reduction of Integro-Differential Equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1914, 15(4):477-496.

[29] Evans, G. C. Fundamental Points of Potential Theory [J]. Rice Institute Pamphlet-Rice University Studies, 1920, 7:252-359.

[30] Evans, G. C. Complements of Potential Theory. Part II[J]. American Journal of Mathematics, 1933, 55(1):29-49.

[31] Fourier, J. The Analytical Theory of Heat[M]. English Translation by A. Freeman. New York: Dover Publication Inc., 1955.（中译本：J. B. J. 傅里叶著．热的解析理论[M]．桂质亮译．北京：北京大学出版社，2008.）

[32] Fréchet, M. R. Sur Quelques Points du Calcul Fonctionnel[D]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1906, 22:1-74.

[33] Friedrichs, K. O. On Differential Operators in Hilbert spaces[J]. American Journal of Mathematics, 1939, 61:523-544.

[34] Gårding, L. Some Points of Analysis and Their History[M]. New York: American Mathematical Society, 1998.

[35] Garnir, H. G. Sur Lès Distributions Résolvantes des Opérateur de la Physique Mathématiques[J]. Bull. Soc. Roy. Sci. liege, 1951, 20:174-194,271-296.

[36] Gel'fand, I. M., Shilov, G. E. Fourier Transforms of Rapidly Increasing Functions and Questions of Uniqueness of the Solution of Cauchy's Problem[J]. Uspehi Matem., 1953, 8:3-54.

[37] Gel'fand, I. M., Vilenkin, N. Ya. Generalized functions Ⅳ[M]. Feinstein,A. New York, London: Academic Press, 1964.（中译本：I. M. 盖尔方特，N. Ya. 维连金著．广义函数Ⅳ[M]．夏道行译．北京：科学出版社，1965.）

[38] Gel'fand, I. M., Shilov, G. E. Generalized Functions Ⅲ[M]. Mayer,M.E. New York, San Francisco, London :Academic Press, 1967.（中译本：I. M. 盖尔方特，G. E. 希洛夫著．广义函数Ⅲ[M]．周宝熙译．北京：科学出版社，1983.）

[39] Gillispie, Ch. C. Dictionary of Scientific Biography（Vol.3）[M]. New York: Charles Scribner's Sons, 1971.

[40] Grothendieck, A. Sur les Espaces（F）et（DF）[J]. Summa Brasil. Math., 1954, 3:57-123.

[41] Grothendieck, A. Produits Tensoriels Topologiques et Espaces Nucléaires[J]. Mem. Amer. Math. Soc., 1955, 16:1-140.

[42] Hadamard, M. Le Problème de Cauchy et les Equations aux Dérivées Partielles du Type Hyperbolique[M]. Paris:Hermann, 1932.

[43] Hahn, H. Über Fouriersche Reihen und Integrale[J]. Jahresber. Deut. Math. Ver., 1925, 33:107.

[44] Hahn, H. Über die Methode der Arithmetischen Mittel in der Theorie der Verallgemeinerten Fourier'schen Integrale[J]. Sitz. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Kl. Abt., 1925, 134:449-470.

[45] Heaviside, O. On Operators in Physical Mathematics PartⅠ[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1892, 52:504-529.

[46] Heaviside, O. On Operators in Physical Mathematics PartⅡ[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1893, 54:105-143.

[47] Hörmander, L. On the Theory of General Partial Differential Operators[D]. Acta mathematica, 1955 , 94(1):161-248.（中译本：L. 赫尔曼德尔著. 一般偏微分算子理论[M]. 覃国光，邹继高译. 上海：上海科学技术出版社，1964.）

[48] Hörmander, L. On the Division of Distributions by Polynomials[J]. Ark. Mat., 1958, 3(6):555-568.

[49] Hörmander, L. Differential Operators of Principal Type[J]. Mathematische Annalen, 1960, 140(2):124-146.

[50] Hörmander, L. Differential Equations without Solutions[J]. Mathematische Annalen, 1960 , 140(3):169-173.

[51] Hörmander, L. Linear Partial Differential Operators[M]. Berlin: Springer, 1963.(中译本：L. 赫尔曼德尔著. 线性偏微分算子[M]. 陈庆益译. 北京：科学出版社, 1980.）

[52] Horvath, J. An Introduction to Distributions[J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3):227-240.

[53] Kantor, M. Mathematics East and West, Theory and Practice: the Example of Distributions[J]. Math. Intelligencer, 2004, 26(1):39-50.

[54] König, H. Neue Begründung der Theorie der “Distributionen” von L.Schwartz[J]. Math. Nachr., 1953, 9:129-148.

[55] König, H. Multiplikation von Distributionen[J]. Math. Ann., 1955, 128:420-452.

[56] Korevaar, J. Distributions Defined from the Point of View of Applied Mathematics[J]. Konikl. Ned. Akad. Wetenskap., 1955, 58:368-389, 483-503, 663-674.

[57] Köthe, G. Die Randverteilungen Analytischer Funktionen[J]. Math. Z., 1955, 57:13-33.

[58] Kutateladze, S. S. Sobolev and Schwarzt : Two Fates and Two Fames[J]. Journal of Applied and Industrial Mathematics, 2008, (2)3:301-310.

[59] Leray, J. On the Motion of a Viscous Liquid Filling the Space[J]. Acta mathematica, 1934, 63:193-248.

[60] Lewy, H. An Example of a Smooth Linear Partial Differential Equation Without Solution[J]. Annals of Mathematics, 1957, 66(1):155-158.

[61] Lighthill, M.J. An Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions[M]. New York: Cambridge University Press, 1958.

[62] Łojasiewicz, S. Division d’une Distribution par une Fonction Analytique de Variables Réelles[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1958, 246:683-686.

[63] Łojasiewicz, S. Sur le Problem de la Division[J]. Studia Math., 1959, 18:87-136.

[64] Lützen, J. Heaviside's Operational Calculus and the Attempts to Rigorise it[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1979, 21(2):161-200.

[65] Lützen, J. The Prehistory of the Theory of Distributions[M]. New York: Springer-Verlag, 1982.

[66] Malgrange, B. Existence et Approximation des Équations aux Dérivées Partielles et des Équations de Convolution [D]. Annales de L'institut Fourier, 1956, 6:271-355.

[67] Malgrange, B. Sur lès Systems Différentiels à Coefficients Constants[J]. Coll. C.N.R.S., Paris, 1963:113-122.

[68] Malgrange, B. Ideals of Differentiable Functions[M]. Oxford: Oxford University press, 1966.

[69] Mashaal, M. Bourbaki: A Secret Society of Mathematicians[M]. New York: American Mathematical Society, 2006.(中译本：M. 马夏尔著. 布尔巴基:数学家的秘密社团[M]. 胡作玄，王献芬译. 长沙：湖南科学技术出版社，2012.)

[70] Mikusinski, J. Sur la Méthode de Généralisation de M. Laurent Schwartz et sur la Convergence Faible[J]. Fund. Math., 1948, 35:235-239.

[71] Mikusinski, J., Sikorski, R. The Elementary Theory of Distributions[M]. Warszawa: Rozprawy Matematyczne, 1957.(中译本：J. 米库辛斯基，R. 西科尔斯基著. 广义函数的基本理论[M]. 复旦大学数学系 1956-1961 级泛函分析组同学译. 北京：人民教育出版社，1960.)

[72] Morrey, C. B., Jr. A Class of Representations of Manifolds. Part I[J]. American Journal of Mathematics, 1933, 55(1):683-707.

[73] Morrey, C. B., Jr. On the Solutions of Quasi-Linear Elliptic Partial Differential Equations[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1938, 43(1):126-166.

[74] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. Paul Adrien Maurice Dirac[J]. MacTutor History of Mathematics, 2003.

[75] O'Connor, J. J., Robertson, E. F. History Topic: Bourbaki: the Pre-War Years[J]. MacTutor History of Mathematics, 2005.

[76] Ortner, N., Wagner, P. A Short Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem[J]. Proc. 1st International Workshop on Functional Analysis, 1994:1-10.

[77] Ortner, N., Wagner, P. A Survey on Explicit Representation Formulae for Fundamental Solutions of Linear Partial Differential Operators[J]. Acta Appl. Math., 1997, 47(1):101-124.

[78] Petrova, S. S. Heaviside and the Development of the Symbolic Calculus[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1987, 37(1):1-23.

[79] Petrovskii, I. G. Sur L'analyticite des Solutions des Systems D'equations Différentielles[J]. Mat. Sb., 1939, 47(5):3-68.

[80] Plancherel, M. Contributions à L'etude de la Representation d'une Fonction Arbitraire par des Intégrales Définies[J]. Rend. Circ. Mat. Palermo, 1910, 30:289-335.

[81] Sato, M. Theory of Hyperfunctions, Part Ⅰ[J]. J. Fac. Sci. Univ.Tokyo,1959, 8: 139-193.

[82] Sato, M. Theory of Hyperfunctions, Part Ⅱ[J]. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo,1960, 8: 387-437.

[83] Schwartz, L. Sur Certaines Familles non Fondamentales de Fonctions Continues[J]. Bulletin de la Société Mathématique de France, 1944, 72:141-145.

[84] Schwartz, L. Généralisation de la Notion de Fonction, de Dérivation, de Transformation de Fourier et Applications Mathématiques et Physiques[J]. Annales de l'Université de Grenoble, 1945, 21:57-74.

[85] Schwartz, L. Théorie des Distributions et Transformation de Fourier[J]. Annales de L'université de Grenoble, 1947-48 , 23:7-24.

[86] Schwartz, L. Généralisation de la Notion de Fonction et de Dérivation. Théorie des Distributions[J]. Annales des Télécommunications, 1948 , 3(4):135-140.

[87] Schwartz, Théorie des Noyaux[J]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 1950, 1:220-230.

[88] Schwartz, L. Transformation de Laplace des Distributions[J]. Comm. Sem. Math. Univ. Lund, 1952:196-206.

[89] Schwartz, L. Espaces de Fonctions Différentiables à Valeurs Vectorielles[J]. J. Analyse Math., 1954, 4(1):88-148.

[90] Schwartz, L. Sur L'impossibilité de la Multiplication des Distributions[J]. C. R. Acad. Sci. Paris, 1954, 239:847-848.

[91] Schwartz, L. Théorie des Distributions à Valeurs Vectorielles Ⅰ[J]. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1957, 7:1-141.

[92] Schwartz, L. Théorie des Distributions à Valeurs Vectorielles Ⅱ[J]. Ann. Inst. Fourier Grenoble, 1958, 8:1-209.

[93] Schwartz, L. Théorie des Distributions[M]. Paris: Hermann, 1966.(中译本：L. 施瓦兹著. 广义函数论[M]. 姚家燕译. 北京：高等教育出版社, 2010.)

[94] Schwartz, L. Application of Distributions to the Study of Elementary Particles in Relativistic Quantum Mechanics[M]. New York: Gordon Breach, 1968.

[95] Schwartz, L. Les Travaux de Bernard Malgrange[J]. Ann. Inst. Fourier(Grenoble), 1993, 43(5): 1119-1209.

[96] Schwartz, L. Un Mathématicien aux Prises Avec le Siècle[M]. Paris: Odile Jacob, 1997.

[97] Schwartz, L.A Mathematician Grappling with His Century[M]. Schneps, L. Basel, Boston, Berlin: Birkhauser, 2001.

[98] Sobolev, S. L. Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics(Third Edition)[M]. McFaden, H. New York: American Mathematical Society, 1991.

[99] Strichartz, R. A Guide to Distribution Theory and Fourier Transforms[M]. Boca Raton:CRC Press, 1994.

[100] Synowiec, J. Distributions: the Evolution of a Mathematical Theory[J]. Historia Mathematica, 1983, 10(2):149-183.

[101] Tonelli, L. Sur la Quadrature des Surfaces[J]. CR Acad. Sci. Paris, 1926, 182: 1198-1200.

[102] Trèves, F. Applications of Distributions to PDE Theory[J]. American Mathematical Monthly, 1970, 77(3):241-248.

[103] Trèves, F., Pisier, G., Yor, M. Laurent Schwartz (1915-2002)[J]. Notices of the AMS, 2003, 50(9):1072-1084.

[104] Vladimirov, V. S. Methods of the Theory of Generalized Functions[M]. London, New York: Taylor & Francis, 2002.

[105] Wagner, P. A New Constructive Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem[J]. The American Mathematical Monthly, 2009, 116(5):457-462.

[106] Walusinski, G. Au Pays de Clairaut et de Bourbaki[J]. Enseignement Math., 3(2),1957:289-297.

[107] Weil, A. L'intégration dans les Groupes Topologiques et ses Applications[M]. Paris: Hermann, 1940.

[108] Whittaker, E. T. Oliver Heaviside[J]. Bull. Calcutta Math. Soc., 1929, 20:199-220.

[109] Wiener, N. The Operational Calculus[J]. Mathematische Annalen, 1926, 95(1): 557-584.

[110] Yushkevich, A.P. Some Remarks on the History of the Theory of Generalized Solutions for Partial Differential Equations and Generalized Functions[J]. Istoyiko-Matematicheskie Issledovanie, 1991:256-266.

[111] 冯康. 广义函数论[J]. 数学进展，1955，1(3): 405-590.

[112] H. 嘉当. 我所知道的 Bourbaki[J]. 冯恭己译. 数学译林，1986，5(3): 234-237.

[113] 胡作玄. 布尔巴基学派的兴衰[M]. 北京：知识出版社，1984.

[114] 胡作玄. 20 世纪的纯粹数学：回顾与展望[J]. 自然辩证法研究，1997，13(5): 1-7.

[115] 胡作玄. 邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南：山东教育出版社，1999.

[116] 胡作玄. 近代数学史[M]. 济南：山东教育出版社，2001.

[117] 李邦河. 非标准分析与广义函数的乘法(Ⅰ)[J]. 中国科学，1978(1):1-10.

[118] 李邦河. 非标准分析与广义函数的乘法(Ⅱ)[J]. 中国科学，1978(2):139-149.

[119] 李迪. 中外数学史教程[M]. 福州：福建教育出版社，1993.

[120] 李斐. 施瓦兹分布概念的形成[J]. 西北大学学报(自然科版)，2014，44(6): 1031-1034.

[121] 李斐，王昌. 分布观念下的常系数线性偏微分方程[J]. 自然辩证法研究，2015，31(10): 109-113.

[122] 李斐. 基本解概念的历史演变[J]. 科学技术哲学研究，2016，33(6): 79-82.

[123] 李斐，袁敏. 施瓦兹《分布理论》探源[J]. 西北大学学报(自然科学版)， 2016，46(3): 464-468.

[124] 李斐，曲安京. 施瓦兹广义函数理论的成因探析[J]. 科学技术哲学研究，2017，34(2): 93-97.

[125] 李斐，曲安京. 施瓦兹空间的成因解析[J]. 自然辩证法通讯，2017，39(3): 65-69.

[126] 李威，曲安京，王昌. 巴拿赫空间是如何产生的[J]. 自然辩证法通讯，2015，37(6): 72-76.

[127] 李文林. 数学史概论[M]. 北京：高等教育出版社，2000.

[128] 梁宗巨，王青建，孙宏安. 世界数学通史(下册)[M]. 沈阳：辽宁教育出版社，2004.

[129] 齐年友. 线性偏微分算子引论(上册)[M]. 北京：科学出版社，1986.

[130] 齐年友，吴方同. 广义函数与数学物理方程[M]. 北京：高等教育出版社，1998.

[131] 王昌，李亚亚. 从希尔伯特空间到巴拿赫空间的建立[J]. 科学技术哲学研究，2015，32(5): 90-93.

[132] 吴文俊. 世界著名数学家传记(上集)[M]. 北京：科学出版社，1995.

[133] 张光远. 近现代数学发展概论[M]. 重庆：重庆出版社，1991.

[134] 左执中，邢如云. 数学辞海(第六卷)[M]. 太原：山西教育出版社，北京：中国科学技术出版社，南京：东南大学出版社，2002.

人 名 索 引

A

B

D

F

G

H

J

K

L

M

N

O

P

Q

S